Využitie Gröbnerových báz na dôkazy viet elementárnej geometrie

Peter Novotný

FMFI UK Bratislava

Čo sú Gröbnerove bázy?

Čo sú Gröbnerove bázy?

$$Q = \{q_1, \ldots, q_m\} \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}]$$

Čo sú Gröbnerove bázy?

$$Q = \{q_1, \ldots, q_m\} \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}]$$

$$\langle Q \rangle = \{f_1 q_1 + \cdots + f_m q_m \ : \ f_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]\}$$

Čo sú Gröbnerove bázy?

$$Q = \{q_1, \ldots, q_m\} \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}]$$

$$\langle Q \rangle = \{f_1 q_1 + \cdots + f_m q_m \ : \ f_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]\}$$

$$\boxed{p \in \mathbb{F}[\mathbf{x}] \qquad p \overset{?}{\in} \langle Q \rangle}$$

Čo sú Gröbnerove bázy?

$$Q = \{q_1, \dots, q_m\} \subset \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}]$$

$$\langle Q \rangle = \{f_1 q_1 + \cdots + f_m q_m \; : \; f_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]\}$$

$$\boxed{p \in \mathbb{F}[\mathbf{x}] \qquad p \overset{?}{\in} \langle Q \rangle}$$

Prirodzená redukcia podľa Q na riešenie problému nestačí.

Čo sú Gröbnerove bázy?

$$Q = \{q_1, \ldots, q_m\} \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}]$$

$$\langle Q \rangle = \{f_1 q_1 + \cdots + f_m q_m \ : \ f_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]\}$$

$$\boxed{p \in \mathbb{F}[\mathbf{x}] \qquad p \overset{?}{\in} \langle Q \rangle}$$

Prirodzená redukcia podľa Q na riešenie problému nestačí.

BRUNO BUCHBERGER: $Q \xrightarrow{\text{Buchb. alg.}} {\color{red}G} \qquad \langle Q \rangle = \langle G \rangle$

Čo sú Gröbnerove bázy?

$$Q = \{q_1, \ldots, q_m\} \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}]$$

$$\langle Q \rangle = \{f_1 q_1 + \cdots + f_m q_m \;:\; f_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]\}$$

$$\boxed{p \in \mathbb{F}[\mathbf{x}] \qquad p \overset{?}{\in} \langle Q \rangle}$$

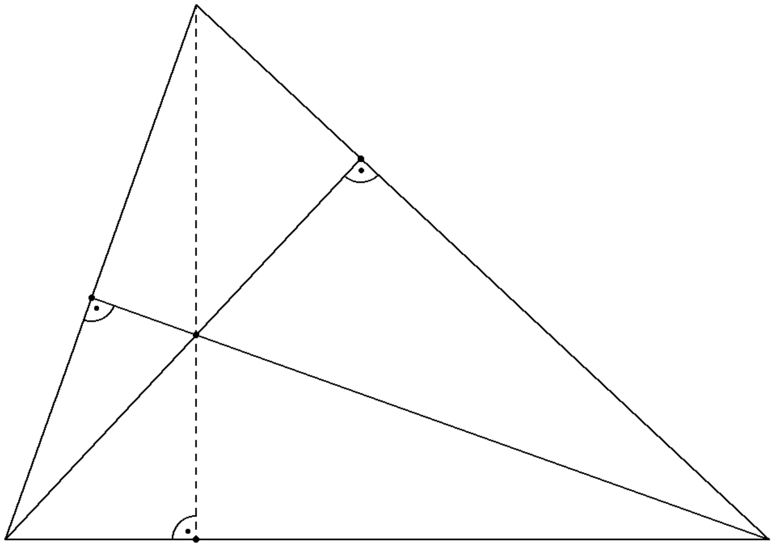
Prirodzená redukcia podľa Q na riešenie problému nestačí.

BRUNO BUCHBERGER: $Q \xrightarrow{\text{Buchb. alg.}} G \qquad \langle Q \rangle = \langle G \rangle$

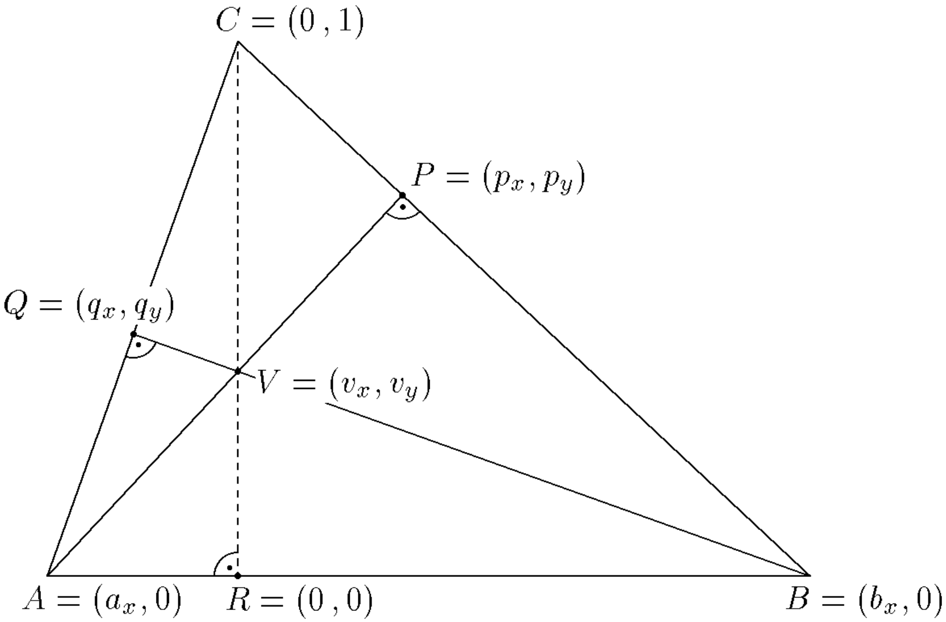
Prir. redukcia podľa G problém rieši – je to kanonická funkcia.

Preformulovanie geometrického tvrdenia

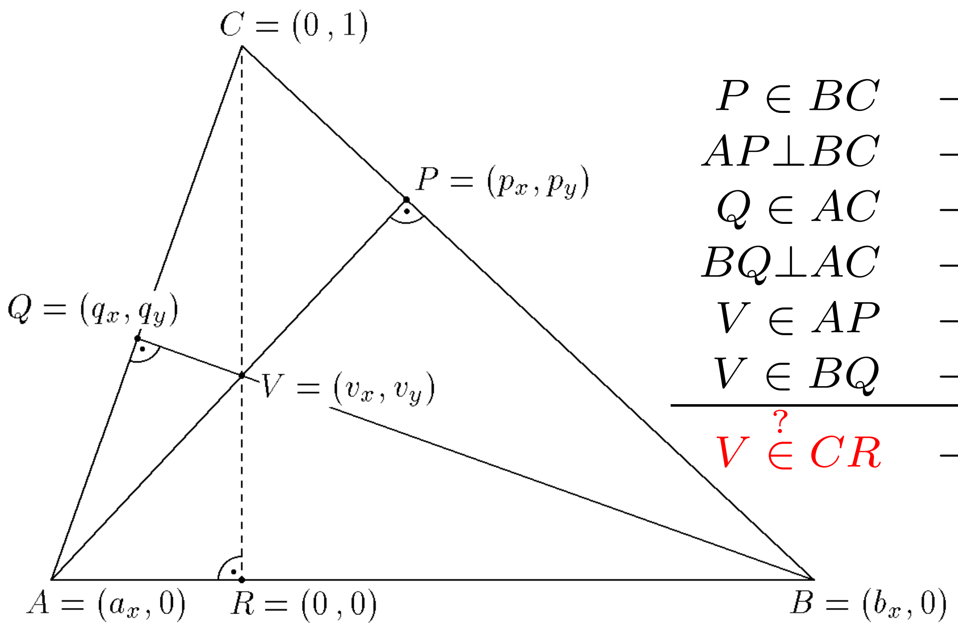
Preformulovanie geometrického tvrdenia



Preformulovanie geometrického tvrdenia

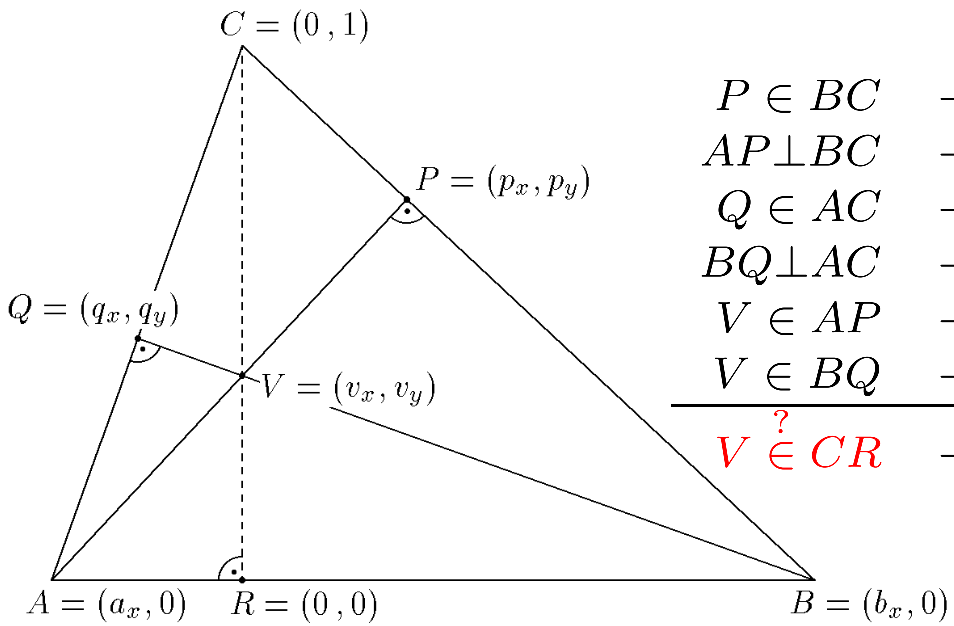


Preformulovanie geometrického tvrdenia



$$
\begin{array}{rcl}
P \in BC & \longrightarrow & p_1 = (b_x - p_x)(1 - p_y) - p_y p_x = 0 \\
AP \perp BC & \longrightarrow & p_2 = -(p_x - a_x) b_x + p_y = 0 \\
Q \in AC & \longrightarrow & p_3 = (a_x - q_x)(1 - q_y) - q_y q_x = 0 \\
BQ \perp AC & \longrightarrow & p_4 = -(q_x - b_x) a_x + q_y = 0 \\
V \in AP & \longrightarrow & p_5 = (a_x - v_x)(p_y - v_y) + v_y (p_x - v_x) = 0 \\
V \in BQ & \longrightarrow & p_6 = (b_x - v_x)(q_y - v_y) + v_y (q_x - v_x) = 0 \\
\hline
V \overset{?}{\in} CR & \longrightarrow & t = v_x = 0
\end{array}
$$

Preformulovanie geometrického tvrdenia



$$
\begin{array}{rcl}
P \in BC & \longrightarrow & p_1 = (b_x - p_x)(1 - p_y) - p_y p_x = 0 \\
AP \perp BC & \longrightarrow & p_2 = -(p_x - a_x) b_x + p_y = 0 \\
Q \in AC & \longrightarrow & p_3 = (a_x - q_x)(1 - q_y) - q_y q_x = 0 \\
BQ \perp AC & \longrightarrow & p_4 = -(q_x - b_x) a_x + q_y = 0 \\
V \in AP & \longrightarrow & p_5 = (a_x - v_x)(p_y - v_y) + v_y (p_x - v_x) = 0 \\
V \in BQ & \longrightarrow & p_6 = (b_x - v_x)(q_y - v_y) + v_y (q_x - v_x) = 0 \\
\hline
V \overset{?}{\in} CR & \longrightarrow & t = v_x = 0
\end{array}
$$

$$
\boxed{p_1 = 0\,,\ \ldots\,,\ p_m = 0 \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad t = 0}
$$

Metóda riešenia

$$p_1 = 0\,,\ \ldots\ ,\ p_m = 0 \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad t = 0$$

Metóda riešenia

$$p_1 = 0\,,\ \ldots\ ,\ p_m = 0 \qquad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \qquad t = 0$$

DEEPAK KAPUR: $\{p_1, \ldots, p_m, tz - 1\} \xrightarrow{\text{Buchb. alg.}} G$

Metóda riešenia

$$p_1 = 0\,,\ \ldots\ ,\ p_m = 0 \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad t = 0$$

DEEPAK KAPUR: $\quad \{p_1, \ldots, p_m, tz - 1\} \xrightarrow{\text{Buchb. alg.}} G$

$$1 \in G \quad : \quad p_1 = 0\,, \ldots\,, p_m = 0 \quad \xRightarrow{\text{Nullstellensatz}} \quad t = 0 \ \checkmark$$

$$s \in G \cap \mathbb{F}[\mathbf{x}] \quad : \quad p_1 = 0\,, \ldots\,, p_m = 0\,,\ s \neq 0 \quad \xRightarrow{\text{Nullstellensatz}} \quad t = 0 \ \checkmark$$

Príklad použitia metódy

Príklad použitia metódy

`MMO 1998, 1. príklad`

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je AC kolmé na BD a AB rôznobežné s DC. Osi strán AB a CD sa pretínajú v bode P vnútri štvoruholníka. Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, ak trojuholníky ABP a CDP majú zhodné obsahy.

Príklad použitia metódy

MMO 1998, 1. príklad

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je AC kolmé na BD a AB rôznobežné s DC. Osi strán AB a CD sa pretínajú v bode P vnútri štvoruholníka. Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, ak trojuholníky ABP a CDP majú zhodné obsahy.

Zavedené súradnice: $P = (0, 0)$, $A = (-1, y)$, $B = (1, y)$, $C = (c_x, c_y)$, $D = (d_x, d_y)$.

Príklad použitia metódy

`MMO 1998, 1. príklad`

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je AC kolmé na BD a AB rôznobežné s DC. Osi strán AB a CD sa pretínajú v bode P vnútri štvoruholníka. Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, ak trojuholníky ABP a CDP majú zhodné obsahy.

`Zavedené súradnice:` $P = (0, 0)$, $A = (-1, y)$, $B = (1, y)$, $C = (c_x, c_y)$, $D = (d_x, d_y)$.

`Predpoklady:`

AC je kolmé na BD $\quad \longrightarrow \quad p_1 = (-1 - c_x)(1 - d_x) + (y - c_y)(y - d_y) = 0$

$|PD| = |PC| \quad \longrightarrow \quad p_2 = c_x^2 + c_y^2 - d_x^2 - d_y^2 = 0$

obsah ABP = obsah CDP $\quad \longrightarrow \quad p_3 = -d_x c_y + c_x d_y + 2y = 0$

Príklad použitia metódy

`MMO 1998, 1. príklad`

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je AC kolmé na BD a AB rôznobežné s DC. Osi strán AB a CD sa pretínajú v bode P vnútri štvoruholníka. Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, ak trojuholníky ABP a CDP majú zhodné obsahy.

`Zavedené súradnice:` $P = (0,0)$, $A = (-1, y)$, $B = (1, y)$, $C = (c_x, c_y)$, $D = (d_x, d_y)$.

`Predpoklady:`

AC je kolmé na BD $\quad\longrightarrow\quad p_1 = (-1 - c_x)(1 - d_x) + (y - c_y)(y - d_y) = 0$

$|PD| = |PC| \quad\longrightarrow\quad p_2 = c_x^2 + c_y^2 - d_x^2 - d_y^2 = 0$

obsah ABP = obsah CDP $\quad\longrightarrow\quad p_3 = -d_x c_y + c_x d_y + 2y = 0$

`Dokazované tvrdenie:`

$|DP| = |AP| \quad\longrightarrow\quad t = 1 + y^2 - d_x^2 - d_y^2 \stackrel{?}{=} 0$

Príklad použitia metódy

`MMO 1998, 1. príklad`

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je AC kolmé na BD a AB rôznobežné s DC. Osi strán AB a CD sa pretínajú v bode P vnútri štvoruholníka. Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, ak trojuholníky ABP a CDP majú zhodné obsahy.

`Zavedené súradnice:` $P = (0,0)$, $A = (-1, y)$, $B = (1, y)$, $C = (c_x, c_y)$, $D = (d_x, d_y)$.

`Predpoklady:`

AC je kolmé na BD $\longrightarrow$ $p_1 = (-1 - c_x)(1 - d_x) + (y - c_y)(y - d_y) = 0$

$|PD| = |PC|$ $\longrightarrow$ $p_2 = c_x^2 + c_y^2 - d_x^2 - d_y^2 = 0$

obsah ABP = obsah CDP $\longrightarrow$ $p_3 = -d_x c_y + c_x d_y + 2y = 0$

`Dokazované tvrdenie:`

$|DP| = |AP|$ $\longrightarrow$ $t = 1 + y^2 - d_x^2 - d_y^2 \stackrel{?}{=} 0$

$$\{p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ tz - 1\} \xrightarrow{\text{Buchb. alg.}} G$$

Príklad použitia metódy

Vygenerovaná Gröbnerova báza G:

$$c_x^2 - yd_y - c_y y + y^2 - d_x + c_x + 1 + cy^2,\ -d_x c_y + c_x d_y + 2y,$$
$$-1 + d_x - c_x + c_x d_x + y^2 - yd_y - c_y y + d_y c_y,$$
$$-yd_y + c_y y + c_x + d_y^2 - c_y^2 + d_x,\ 2y - c_y + c_x y + d_x d_y - d_x y - d_y - c_x c_y,$$
$$d_x^2 + c_y^2 - 2c_y y + y^2 - 2d_x + 1,\ -2z - 2zy^2 + 1 + d_y zy + zc_y y + d_x z - zc_x,$$
$$2c_y zy^2 - 2zy^3 - 2zd_x c_y + 2c_y zc_x + zd_x y - 3zc_x y - zd_y + 3c_y z - 2zy + d_y - c_y + y,$$
$$-c_x zy^2 + zd_x y^2 - 2zd_y c_y + 2zc_y^2 - 2zc_y y - 3d_x z + zc_x + 4z - d_x + c_x,$$
$$zd_x c_y y + zc_x c_y y - 2c_x zy^2 - zd_y c_y + zc_y^2 - 2zy^2 - 2d_x z + 2z + c_x$$

Príklad použitia metódy

Vygenerovaná Gröbnerova báza G:

$$c_x^2 - yd_y - c_yy + y^2 - d_x + c_x + 1 + cy^2,\ -d_xc_y + c_xd_y + 2y,$$
$$-1 + d_x - c_x + c_xd_x + y^2 - yd_y - c_yy + d_yc_y,$$
$$-yd_y + c_yy + c_x + d_y^2 - c_y^2 + d_x,\ 2y - c_y + c_xy + d_xd_y - d_xy - d_y - c_xc_y,$$
$$d_x^2 + c_y^2 - 2c_yy + y^2 - 2d_x + 1,\ -2z - 2zy^2 + 1 + d_yzy + zc_yy + d_xz - zc_x,$$
$$2c_yzy^2 - 2zy^3 - 2zd_xc_y + 2c_yzc_x + zd_xy - 3zc_xy - zd_y + 3c_yz - 2zy + d_y - c_y + y,$$
$$-c_xzy^2 + zd_xy^2 - 2zd_yc_y + 2zc_y^2 - 2zc_yy - 3d_xz + zc_x + 4z - d_x + c_x,$$
$$zd_xc_yy + zc_xc_yy - 2c_xzy^2 - zd_yc_y + zc_y^2 - 2zy^2 - 2d_xz + 2z + c_x$$

Príklad použitia metódy

Vygenerovaná Gröbnerova báza G:

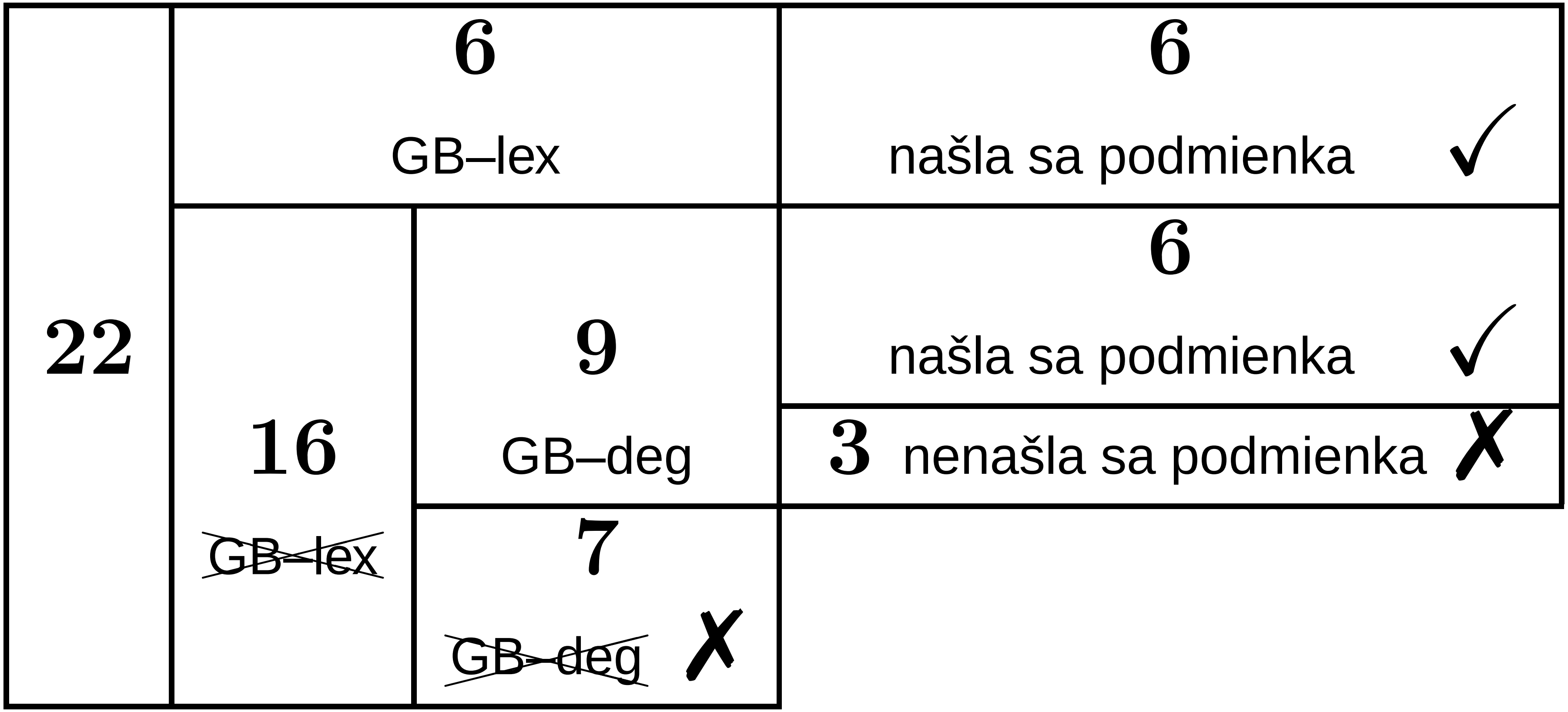
$c_x^2 - yd_y - c_yy + y^2 - d_x + c_x + 1 + cy^2$, $-d_xc_y + c_xd_y + 2y$,
$-1 + d_x - c_x + c_xd_x + y^2 - yd_y - c_yy + d_yc_y$,
$-yd_y + c_yy + c_x + d_y^2 - c_y^2 + d_x$, $2y - c_y + c_xy + d_xd_y - d_xy - d_y - c_xc_y$,
$d_x^2 + c_y^2 - 2c_yy + y^2 - 2d_x + 1$, $-2z - 2zy^2 + 1 + d_yzy + zc_yy + d_xz - zc_x$,
$2c_yzy^2 - 2zy^3 - 2zd_xc_y + 2c_yzc_x + zd_xy - 3zc_xy - zd_y + 3c_yz - 2zy + d_y - c_y + y$,
$-c_xzy^2 + zd_xy^2 - 2zd_yc_y + 2zc_y^2 - 2zc_yy - 3d_xz + zc_x + 4z - d_x + c_x$,
$zd_xc_yy + zc_xc_yy - 2c_xzy^2 - zd_yc_y + zc_y^2 - 2zy^2 - 2d_xz + 2z + c_x$

Doplňujúca podmienka:

$$d_x^2 + c_y^2 - 2c_yy + y^2 - 2d_x + 1 = (c_y - y)^2 + (d_x - 1)^2 \neq 0$$

Príklad	n	$\|P\|$	s	$<$	$\|G\|$	$\sum \|g_i\|$	podmienka
84/4 $\Rightarrow$	6	4	2	L	16	141	$(y-c_y)(xd_y+d_y+c_yx-c_y)$
84/4 $\Leftarrow$	6	4	2	L	8	46	$c_x - x$
85/1	6	4	6	$-$			
85/5	10	7	2	D	16	237	$-$
87/2	9	7	2	D	90	1242	$\ell(2a_x-1)(\ell-1)$
92/4	8	6	3	L	18	164	$d(d-m)(d+m)$
93/2(*a*)	4	2	4	D	7	54	$a-x-b+ay-bx$
93/2(*b*)	7	5	4	D	76	3565	$-by-2bya+\cdots+b^2$
94/2 $\Rightarrow$	7	5	2	L	11	46	$(q-1)(q+1)$
94/2 $\Leftarrow$	7	5	2	L	19	187	$(e_yb+q+1)^2+e_y^2$
95/1	10	7	3	D	40	2385	$pr(x-s+r)$
96/2	9	6	64	$-$			
97/2	8	5	8	$-$			
98/1 $\Rightarrow$	5	3	4	D	9	42	d_yc_y
98/1 $\Leftarrow$	5	3	2	D	10	76	$(c_y-y)^2+(d_x-1)^2$
99/5	10	8	2	$-$			
00/1	7	5	3	L	7	24	$a-b$
00/6	22	20	2	$-$			
02/2	10	9	6	D	89	2769	$-$
03/3	8	3	4	D	5	5595	$-$
03/4 $\Rightarrow$	11	9	6	$-$			
03/4 $\Leftarrow$	12	10	6	$-$			

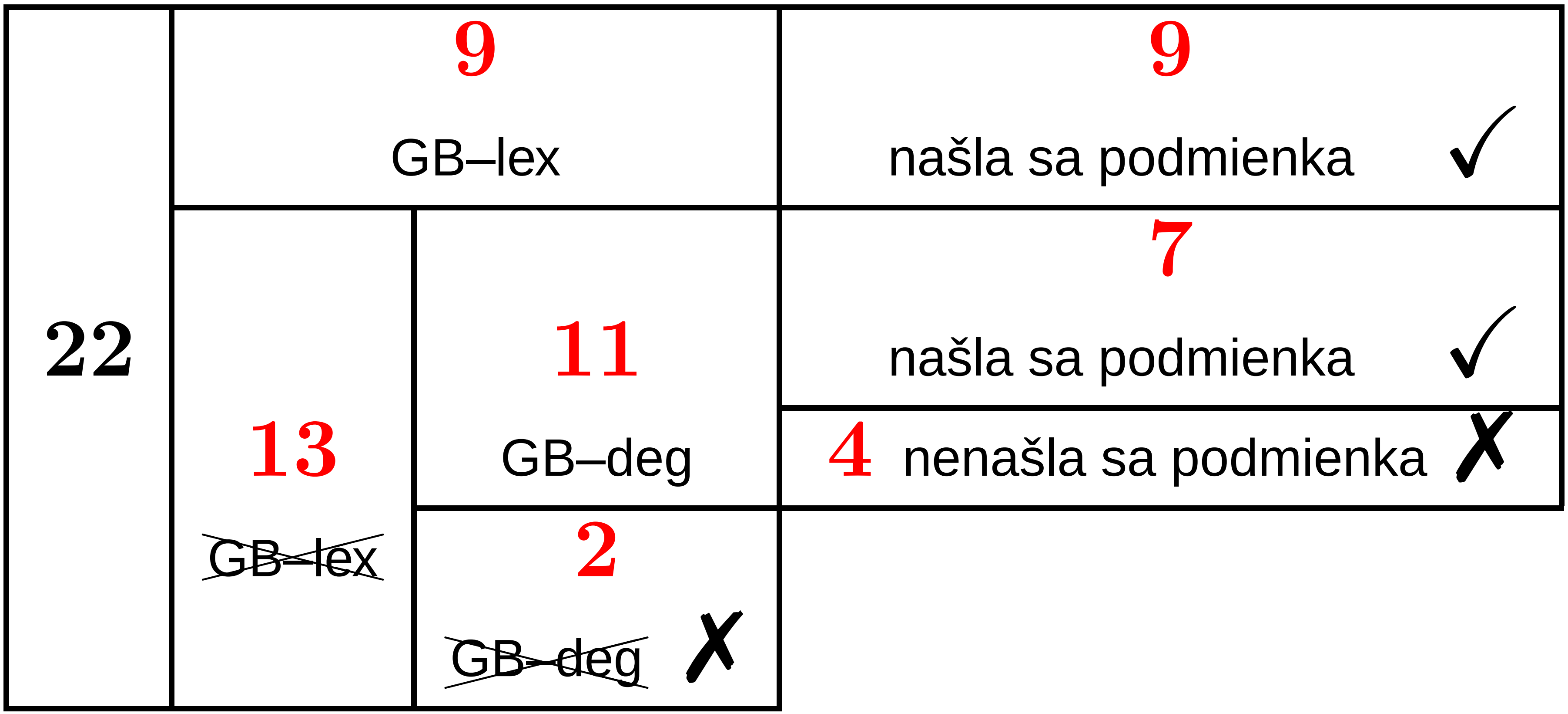
Príklad	n	$\|P\|$	s	$<$	$\|G\|$	$\sum \|g_i\|$	podmienka
84/4 $\Rightarrow$	6	4	2	L	16	141	$(y-c_y)(xd_y+d_y+c_yx-c_y)$
84/4 $\Leftarrow$	6	4	2	L	8	46	c_x-x
85/1	6	4	6	D	181	116272	$-$
85/5	10	7	2	D	59	1992	$(k+1)(c_y-n_y)$
87/2	9	7	2	D	90	1242	$\ell(2a_x-1)(\ell-1)$
92/4	8	6	3	L	18	164	$d(d-m)(d+m)$
93/2(a)	4	2	4	D	7	54	$a-x-b+ay-bx$
93/2(b)	7	5	4	D	76	3565	$-by-2bya+\cdots+b^2$
94/2 $\Rightarrow$	7	5	2	L	11	46	$(q-1)(q+1)$
94/2 $\Leftarrow$	7	5	2	L	19	187	$(e_yb+q+1)^2+e_y^2$
95/1	10	7	3	D	40	2385	$pr(x-s+r)$
96/2	9	6	64	$-$			
97/2	8	5	8	L	58	153520	$c_y(u_x+1)(w_y-c_y)$
98/1 $\Rightarrow$	5	3	4	D	9	42	d_yc_y
98/1 $\Leftarrow$	5	3	2	D	10	76	$(c_y-y)^2+(d_x-1)^2$
99/5	10	8	2	D	158	12029	$-$
00/1	7	5	3	L	7	24	$a-b$
00/6	22	20	2	$-$			
02/2	10	9	6	D	89	2769	$-$
03/3	8	3	4	D	5	5595	$-$
03/4 $\Rightarrow$	11	9	6	D	236	43572	$(d_y-y)^2(b_y-y)^2$
03/4 $\Leftarrow$	12	10	6	L	18	425	b_y-y



GB–lex: podarilo sa vygenerovanie lexikografickej bázy,

GB–deg: podarilo sa vygenerovanie stupňovej bázy,

✓: vyriešené úlohy, ✗: nevyriešené úlohy.



GB–lex: podarilo sa vygenerovanie lexikografickej bázy,

GB–deg: podarilo sa vygenerovanie stupňovej bázy,

✓: vyriešené úlohy, ✗: nevyriešené úlohy.

ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ