Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Součiny Fréchetovských prostorů

Miroslav Olšák

Katedra algebry
Vedoucí práce: prof. RNDr. Simon Petr, DrSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: matematické struktury
Praha 2015


SIGILLUM UNIVERSITATIS SCOLARIUM STUDII PRAGENSIS

Poděkování

Chtěl bych poděkovat profesoru Simonovi za matematické náměty a povzbudivé konzultace a dále svému otci za pomoc s TEXem a grafickou úpravou práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 30. 7. 2015

. . . .

Přehled

Název práce: Součiny Fréchetovských prostorů
Autor: Miroslav Olšák
Katedra: Katedra algebry
Vedoucí práce: prof. RNDr. Simon Petr, DrSc.
Abstrakt: Práce se zabývá konstrukcemi příkladů k-tice prostorů, jejichž součin nemá Fréchet-Urysohnovu vlastnost, ale všechny menší podsoučiny ji mají. Pro tyto konstrukce jsou použity skoro disjunktní systémy. V práci je zopakována konstrukce Petra Simona dvou kompaktních prostorů s touto vlastností. Pro příklad s více prostory práce zobecňuje pojmy skoro disjunktních systémů do více dimenzí a předvádí konstrukci obecného takového příkladu za pomocí silně úplně separabilního maximálního skoro disjunktního systému. Ten je sestrojen za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{b}$, kde $\mathfrak{s}$ je splitting number a $\mathfrak{b}$ je bounding number.
Klíčová slova: topologie, Fréchet Urysohnova vlastnost, součin, AD systém, úplná separabilita

Summary

Title: Products of Fréchet spaces
Author: Miroslav Olšák
Department: Department of Algebra
Supervisor: prof. RNDr. Simon Petr, DrSc.
Abstract: The article gives a constructions of k-tuples of topological spaces such that the product of the k-tuple is not Fréchet-Urysohn but all smaller subproducts are. The construction uses almost disjoint systems. The article repeats the construction by Petr Simon of two such compact spaces. To achieve more dimensional example there are generalized terms of AD systems. The example is constructed under the assumption of existence of a strong completely separable MAD system. It is then constructed under the assumption $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{b}$ where $\mathfrak{s}$ is the splitting number and $\mathfrak{b}$ is the bounding number.
Keywords: topology, Fréchet Urysohn property, product, AD system, complete separability

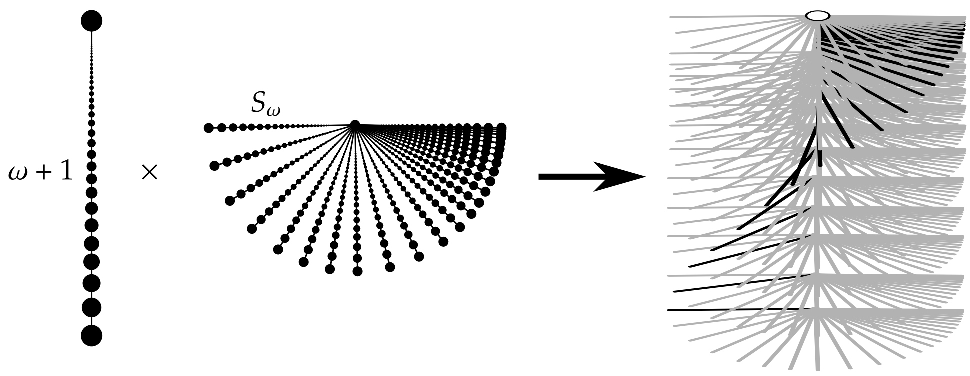
Obsah

Obrázky

Úvod

Fréchetovský topologický prostor (též Fréchet Urysohnův) je takový, ve kterém kdykoli uvážíme podmnožinu X nosné množiny tohoto prostoru a pak bod x v uzávěru X, najdeme nekonečnou posloupnost prvků z množiny X, která konverguje k bodu x. Například jsou Fréchetovské všechny prostory se spočetným charakterem, speciálně tedy i všechny metrické prostory.

Mnoho vlastností topologických prostorů se při součinu zachovává – součin Hausdorffových prostorů je Hausdorffův, součin kompaktních prostorů je kompaktní, spočetný součin metrických prostorů je metrický. Fréchetova vlastnost však tuto vlastnost nemá – uvedeme jednoduchý protipříklad:



Obrázek 0.1. Součin dvou Fréchetovských prostorů, který není Fréchetovský.

Uvažme prostor $\omega + 1$, tj. nekonečnou posloupnost konvergující k jednomu bodu ∞ a prostor S_ω, tj. prostor na nosné množině $(\omega \times \omega) \cup \{\infty\}$ s nejjemnější možnou topologií, aby pro každé n posloupnost (n, i) konvergovala k ∞ pro $i \to \infty$.

Oba tyto prostory Fréchetovské jsou, ale jejich součin už není. V součinu $(\omega + 1) \times S_\omega$ uvažme podmnožinu: $X = \{(n, (n, i)) : n, i \in \omega\}$, tedy za každé jedno patro v $\omega + 1$ sebereme jednu (pokaždé jinou) konvergující posloupnost v S_ω. Pro každé n leží bod (n, ∞) v uzávěru X, tedy v něm leží i bod (∞, ∞). Na druhou stranu kdykoli z X vybereme nekonečnou podposloupnost, nedokonvergujeme pomocí ní k tomuto bodu: Aby posloupnost konvergovala k ∞ při projekci na S_ω, musí některou posloupnost v S_ω protnout nekonečně krát. To ale znamená, že bude mít tato posloupnost nekonečně mnoho prvků v jenom patře a nebude tak konvergovat k ∞ při projekci na $\omega + 1$.

Tato práce se zabývá otázkou, za jakých předpokladů a nakolik pěkné je možné sestrojit takové a podobné protipříklady. V článku [1] jsou sestrojeny všechny tyto protipříklady za předpokladu Martinova axiomu (2.16). Pro konstrukci jsou použity AD systémy, které kromě praktičtější manipulace automaticky zajistí i kompaktnost těchto prostorů.

Cílem práce bylo zabývat (bez použití Martinova axiomu) otázkami:

a) Existuje n-tice (kompaktních) Fréchetovských prostorů, jejíž součin není Fréchetovský, ale všechny součiny $(n-1)$-tic Fréchetovské jsou?
b) Otázka a) za předpokladu existence nekonečného úplně separabilního MAD systému.
c) Existuje spočetný soubor Fréchetovských prostorů, jejichž součin není Fréchetovský, avšak všechny konečné podsoučiny jsou?

Na otázku c) v této podobě odpovídá poznámka 1.3, avšak jedná se o spíše o speciální případ, který není možné zobecňovat. Hlavní přínos práce spočívá v postupu řešení otázky b), do které je krom a) zahrnuta i zesílená verze otázky c). Přesné znění tohoto zesílení je popsáno v definici 1.2. Konstrukce sice není nalezena čistě za předpokladu existence nekonečného úplně separabilního MAD systému, ale je (coby věta 4.23) nalezena za předpokladu existence nekonečného silně úplně separabilního MAD systému.

V článku [5] je popsána konstrukce nekonečného úplně separabilního MAD systému za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$. Tato práce v kapitole 5 přináší obdobnou konstrukci nekonečného silně úplně separabilního MAD systému za obdobného předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}_\omega$, což je dosud nejslabší známý předpoklad.

Trochu jinou cestou se ubíral přístup z článku [2]. Zde je opět za použití AD systémů sestrojen příklad s dvěma kompaktními prostory, zcela bez dodatečných předpokladů z teorie množin. Tato konstrukce je předvedena v sekci 3.3. Pro konstrukci vyšších protipříkladů je však zde problematické zaručit, aby i všechny menší součiny byly Fréchetovské.

Kapitola 1

Základní značení

Jak je v teorii množin zvykem, považujeme nulu za přirozené číslo a přirozené číslo n ztotožňujeme s množinou $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Symbolem ω pak značíme množinu všech přirozených čísel (ekvivalentně suprémum všech přirozených čísel). Přirozená čísla (výjimečně včetně omega) obvykle značíme malými písmeny $i, j, k, n, \dots$.

Množiny (čísel, bodů) obvykle značíme velkými písmeny. Na obecné množině M pak můžeme uvažovat systémy podmnožin – ty pak značíme kaligrafickými písmeny a množinu všech podmnožin množiny M značíme $\mathcal{P}(M)$, tedy například $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$.

Přirozená čísla pokračují ordinálními čísly, které obvykle značíme řeckými pismenky $\alpha, \gamma, \dots$. V nich ω_1 značí první nespočetný kardinál a $\mathfrak{c}$ kontinuum, tedy kardinalitu $\mathcal{P}(\omega)$.

Zobrazení $\varphi \colon A \to B$ teorie množin běžně interpretuje jako podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ jistých vlastností. Z toho využijeme pro zobrazení $\psi \colon A_0 \to B_0$ značení $\psi \subset \varphi$, které je ekvivalentní $\varphi \restriction (A \cap A_0) = \psi$. Dále řekneme, že φ a ψ jsou kompatibilní, pokud $\varphi \cup \psi$ je stále zobrazení, ekvivalentně $\varphi \restriction (A \cap A_0) = \psi \restriction (A \cap A_0)$. V opačném případě řekneme, že jsou nekompatibilní.

Pokud za zobrazením φ následují hranaté závorky namísto kulatých, následuje množina dosazovaných hodnot a výsledkem je množina funkčních hodnot, tedy $\varphi[X] = \{\varphi(x) : x \in X\}$.

Pro množiny (případně i prostory) $M_0, ..., M_{k-1}$ můžeme uvážit kartézský součin

$$M_0 \times \cdots \times M_{k-1} = \prod_{i \in k} M_i.$$

Jsou li všechny tyto množiny rovny M, můžeme psát i jednoduše M^k. Ve všech těchto případech máme na součinu definovány jednoduché projekce $\pi_0, \dots, \pi_{k-1}$, coby zobrazení dané předpisem

$$\pi_i \colon \prod_{j \in k} M_j \to M_i, \quad \pi_i(x_0, \dots, x_{k-1}) = x_i.$$

Je-li indexová množina součinu jiná než přirozené číslo, indexujeme i projekce touto indexovou množinou.

Krom jednoduchých projekcí definujeme ještě projekce na množinu: Pro indexovou množinu I a její podmnožinu J definujeme projekci

$$\pi_J \colon \prod_{i \in I} M_i \to \prod_{i \in J} M_i$$

tak, aby toto zobrazení zachovalo všechny jednoduché projekce π_j pro $j \in J$. Nakonec speciálním případem projekce na množinu je vynechávací projekce značená $\pi_{\neg i}$, kde i leží v indexové množině I. Tento symbol je ekvivalentem $\pi_{I \setminus \{i\}}$.

Topologické prostory, coby dvojici (nosná množina, topologie) obvykle značíme velkými tučnými písmeny, například $\boldsymbol{X} = (M, \tau)$.

V topologických prostorech bude typicky význačným bodem bod ∞. Pokud vynásobíme několik takových prostorů, je v tomto součinu stále jasný význačný bod $(\infty, \dots, \infty)$, abychom nemuseli plýtvat symboly, budeme takový bod vždy opět značit ∞.

1.1 Fréchetovskost

Zopakujeme a upřesníme definice z úvodu.

Definice 1.1. Topologický prostor $\boldsymbol{X}$ nazveme Fréchetovský, pokud pro každou množinu $X \subset \boldsymbol{X}$ a $x \in \overline{X}$ existuje posloupnost $x_0, x_1, \ldots \in X$, která konverguje k x, tedy každé okolí x obsahuje všechny až na konečně mnoho x_i.

Definice 1.2. Pro přirozené číslo $k > 1$ rozumíme k-protipříkladem k-tici kompaktních prostorů $\boldsymbol{X}_0, \ldots, \boldsymbol{X}_{k-1}$, jejichž součin není Fréchetovský, ale pro každou funkci $\sigma\colon (k-1) \to k$ součin $\prod_{i \in (k-1)} \boldsymbol{X}_{\sigma(i)}$ Fréchetovský je. Dále ω-protipříkladem rozumíme nekonečnou posloupnost kompaktních prostorů $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \ldots$, jejichž součin není Fréchetovský, ale pro každou funkci $\sigma\colon k \to \omega$, kde $k \in \omega$, součin $\prod_{i \in k} \boldsymbol{X}_{\sigma(i)}$ Fréchetovský je.

Poznámka 1.3. Pokud bychom z definice ω-protipříkladu vypustili kompaktnost a požadavek na součiny by byl jen tvaru: Pro každé $k \in \omega$ je součin $\prod_{i \in k} \boldsymbol{X}_i$ Fréchetovský (tedy bez funkce σ), fungoval by následující příklad. Coby $\boldsymbol{X}_0$ použijeme prostor S_ω z úvodu, který je Fréchetovský, ale po vynásobení prostorem $\omega + 1$ již Fréchetovský není. Coby všechny ostatní prostory $\boldsymbol{X}_i$ zvolíme dvouprvkové diskrétní prostory. Zajisté všechny součiny začátků posloupnosti $\boldsymbol{X}_i$ budou Fréchetovské, protože se jedná jen o disjunktní sjednocení konečně mnoha kopií Fréchetovského prostoru S_ω. Zato součin všech těchto prostorů Fréchetovský není, protože $\omega + 1$ je podprostorem $\prod_{0<i<\omega} \boldsymbol{X}_i$.

Speciálním příkladem k-protipříkladu resp. ω-protipříkladu by byl prostor, jehož k-tá resp. ω-tá mocnina není Fréchetovská, ale všechny menší mocniny jsou. Snadno ukážeme, že požadavek na takový protipříklad, ve kterém jsou všechny prostory stejné, je ekvivalentní požadavku na obecný k-protipříkad.

Tvrzení 1.4. Předpokládejme, že existuje k-protipříklad pro $k \leq \omega$. Pak existuje takový k-protipříklad, ve kterém jsou všechny prostory stejné.

Důkaz: Předpokládejme, že nosné množiny jednotlivých prostorů $\boldsymbol{X}_i$ z daného k-protipříkladu jsou disjunktní. Pro $k < \omega$ uvažme jednoduše sjednocení (součet) těchto prostorů $\boldsymbol{X} = \bigcup_{i \in k} \boldsymbol{X}_i$. Pak můžeme mocninu $\boldsymbol{X}^{k-1}$ napsat jako

$$\boldsymbol{X}^{k-1} = \bigcup_{\sigma \in S} \prod_{i \in (k-1)} \boldsymbol{X}_{\sigma(i)},$$

kde S značí množinu všech funkcí z $(k-1)$ do k.

Každý ze sčítanců je Fréchetovský z předpokladu, že prostory $\boldsymbol{X}_i$ tvoří k-protipříklad. Mocnina $\boldsymbol{X}^{k-1}$ je tedy Fréchetovská proto, že se jedná o součet konečně mnoha Fréchetovských prostorů. Zato mocnina $\boldsymbol{X}^k$ není Fréchetovská, protože obsahuje podprostor $\prod_{i \in k} \boldsymbol{X}_i$, který není Fréchetovský.

Zbývá dokázat tvrzení pro $k = \omega$. Pak můžeme opět uvážit součet těchto prostorů, ale ten v takovém případě nebude kompaktní. Finální prostor $\boldsymbol{X}$ proto doplníme o bod ∞, jehož okolí budou tvořit z takové množiny, které obsahují celé všechny $\boldsymbol{X}_i$ až na konečně mnoho. Snadno nahlédneme, že se jedná o kompakt a že $\boldsymbol{X}^\omega$ není Fréchetovský. Zbývá ukázat, že všechny konečné mocniny $\boldsymbol{X}$ jsou Fréchetovské.

Uvažme podmnožinu $X \subset \boldsymbol{X}^n$, kde $n \in \omega$ a dále zvolme bod $x \in \overline{X}$. Pro danou souřadnici $i \in n$ mohou nastat dvě možnosti.

(i) $\pi_i(x) \neq \infty$. Pak $\pi_i(x) \in \boldsymbol{X}_{\sigma(i)}$ pro nějaké $\sigma(i)$ a stačí se zúžit jen na otevřený podprostor $\pi_i^{-1}[\boldsymbol{X}_{\sigma(i)}]$.

(ii) $\pi_i(x) = \infty$. Pak uvažme prostor $\boldsymbol{Y}$ na nosné množině $\omega \cup \{\infty\}$, ve kterém posloupnost izolovaných bodů ω konverguje k ∞. Dále uvažme zobrazení $f\colon \boldsymbol{X} \to \omega \cup \{\infty\}$

definované předpisem

$$f(y) = \begin{cases} i & \text{pro } y \in \boldsymbol{X}_i \\ \infty & \text{pro } y = \infty \end{cases}.$$

Pak posloupnost prvků $x_0, x_1, \ldots \in \boldsymbol{X}$ konverguje k $\pi_i(x) = \infty$ právě tehdy, když posloupnost $f(x_0), f(x_1), \ldots$ konverguje k $f(\pi_i(x)) = \infty$. Faktorizujeme proto v i-té souřadnici $\boldsymbol{X}$ pomocí zobrazení f na prostor $\boldsymbol{Y}$. Vzhledem k tomu, že všechny $\boldsymbol{X}_j$ nemůžou být izolované (jinak by jejich součin byl Fréchetovský), lze prostor $\boldsymbol{Y}$ vnořit do nějakého $\boldsymbol{X}_{\sigma(i)}$.

Provedením tohoto procesu přes všechny souřadnice převedeme původní problém na Fréchetovskost součinu $\prod_{i \in n} \boldsymbol{X}_{\sigma(n)}$, u kterého jsme Fréchetovskost předpokládali. ■

Kapitola 2

Ideály

Pro začátek nebudeme řešit požadavek kompaktnosti. Je nabíledni, že vlastnost $x \in \overline{X}$ a existence posloupnosti prvků z množiny X konvergující k x závisí jen na systémů okolí bodu x a ne na ostatních otevřených množinách. Přeneseme se proto z jazyka topologických prostorů do jazyka ideálů, které popisují právě tuto strukturu a popíšeme přechod mezi ideály a topologickými prostory.

Definice 2.1. Ideál na množině M je systém $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(M)$ splňující:

- Pro každé $I, J \in \mathcal{I}$ je $I \cup J \in \mathcal{I}$,
- pro $I \in \mathcal{I}$ a $J \subset I$ je $J \in \mathcal{I}$,
- pro každé $x \in M$ je $\{x\} \in \mathcal{I}$.

Poznámka 2.2. Obvykle v definici ideálu není vyžadována třetí podmínka na obsahování všech konečných podmnožin, nicméně zde je praktická a ne příliš omezující.

Nyní popíšeme přechod od ideálu k prostorům a zpátky.

Definice 2.3. Pro ideál $\mathcal{I}$ na M definujeme prostor $\boldsymbol{X}(\mathcal{I})$ s nosnou množinou $M \cup \{\infty\}$ (předpokládáme $\infty \notin M$) a následující topologií: Množina U je otevřená právě když neobsahuje ∞ nebo když $M \setminus U \in \mathcal{I}$.

Definice 2.4. Pro T_1 prostor $\boldsymbol{X} = (M, \tau)$ a bod $x \in \boldsymbol{X}$ definujeme systém množin $\mathcal{I}(\boldsymbol{X}, x)$ odražených od x. Tedy nosná množina bude $M \setminus \{x\}$ a bude $I \in \mathcal{I}$ právě když existuje $U \in \tau$, $x \in U$, $U \cap I = \emptyset$.

Pozorování 2.5.

- $\boldsymbol{X}(\mathcal{I})$ definuje T_2 topologický prostor (díky třetí podmínce ideálu),
- $\mathcal{I}(\boldsymbol{X}, x)$ je ideál (třetí podmínku zaručí T_1 vlastnost),
- pro libovolný ideál $\mathcal{I}$ vyjde $\mathcal{I}(\boldsymbol{X}(\mathcal{I}), \infty) = \mathcal{I}$,
- pro prostor $\boldsymbol{X}$ s bodem ∞ je prostor $\boldsymbol{X}(\mathcal{I}(\boldsymbol{X}, \infty))$ na stejné nosné množině jako původní $\boldsymbol{X}$ a v obou prostorech se zachovají okolí ∞, tedy i podmínky:
  - V uzávěru dané množiny leží ∞,
  - posloupnost $x_0, x_1, \ldots$ konverguje k ∞.

Vidíme tedy, že pro Fréchetovskost se klíčové vlastnosti zachovají. Nyní popíšeme další ideálovou terminologii.

Definice 2.6. Pro obecný systém množin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ definujeme ideál generovaný $\mathcal{A}$, značený $\langle \mathcal{A} \rangle$ jako nejmenší ideál obsahující $\mathcal{A}$. Jinými slovy obsahuje $\langle \mathcal{A} \rangle$ všechna konečná sjednocení prvků $\mathcal{A}$ a konečných množin a všechny podmnožiny takových sjednocení.

Definice 2.7. Pro obecný systém množin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ definujeme ortogonální doplněk $\mathcal{A}^\perp$ coby množinu všech těch množin, které protínají každou $A \in \mathcal{A}$ jen v konečné množině.

Pozorování 2.8.

- $\mathcal{A}^\perp$ tvoří ideál,
- $\mathcal{A}^\perp = \langle \mathcal{A} \rangle^\perp$.

Navíc ortogonální doplněk tvoří sám se sebou Galoisovu korespondenci (vzhledem k relaci mít konečný průnik). Platí tedy například ještě $(\mathcal{A}^\perp)^\perp \supset \mathcal{A}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když je $\mathcal{A}$ nějakým ortogonálním doplnkem.

Definice 2.9. Pro obecný systém množin $\mathcal{A}$ definujeme ortogonální uzávěr $\overline{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$. Řekneme, že ideál $\mathcal{I}$ je ortogonálně uzavřený, pokud $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$

Zbývá si rozmyslet, jak tyto pojmy korespondují s pojmy v prostorech.

Pozorování 2.10. Mějme ideál $\mathcal{I}$ na nosné množině M a $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\mathcal{I})$. Ještě zvolme libovolnou bázi $\mathcal{B}$ okolí bodu ∞ a položme $\mathcal{A} = \{M \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$. Pak platí:

- $\mathcal{I} = \langle \mathcal{A} \rangle$.
- Posloupnost $x_0, x_1, \ldots \in M$ konverguje k ∞ právě tehdy, když se v ní každý prvek M vyskytuje jen konečněkrát a $\{x_i : i \in \omega\} \in \mathcal{I}^\perp$. Přitom dokonce stačí použít $\mathcal{A}^\perp$ z minulého bodu, protože $\mathcal{I}^\perp = \mathcal{A}^\perp$.
- Množina $X \subset M$ má v uzávěru bod ∞ právě tehdy, když $X \notin \mathcal{I}$.
- V množině $X \subset M$ není možné najít posloupnost konvergující k ∞ právě tehdy, když má každá taková posloupnost s X jen konečný průnik, což nastane právě tehdy, když $X \in \overline{\mathcal{I}}$ (ekvivalentně $X \in \overline{\mathcal{A}}$).
- Prostor $\boldsymbol{X}$ je Fréchetovský právě tehdy, když každá množina X splňující $X \notin \mathcal{I}$ splňuje $X \notin \overline{\mathcal{I}}$. Jinými slovy, když $\mathcal{I}$ je ortogonálně uzavřený.

Ortogonální uzávěr tak je pěkná operace, která z prostoru, který není Fréchetovský vytvoří prostor, který již je Fréchetovský. Zde jej však nevyužijeme, protože si příliš dobře nerozumí se součiny.

Příklad 2.11. Prostory zmíněné v úvodu jsou ve skutečnosti snadno sestrojitelné pomocí ideálů. Nechť $\mathcal{I}$ je ideál generovaný prázdnou množinou na množině ω a $\mathcal{B}$ je disjunktní rozklad spočetné nosné množiny na nekonečně mnoho nekonečných množin. Pak $\omega{+}1 \simeq \boldsymbol{X}(\mathcal{I})$ a $S_\omega \simeq \boldsymbol{X}(\mathcal{B}^\perp)$. Ideál $\mathcal{I}$ je zřejmě ortogonálně uzavřený a ideál $\mathcal{B}^\perp$ je ortogonálně uzavřený už jen proto, že se jedná o nějaký ortogonální doplněk. To dokládá, že jsou oba prostory Fréchetovské.

2.1 Prostory s malým charakterem

Jak je zmíněno v úvodu, prostory se spočetným charakterem (tedy každý bod má spočetnou bázi okolí) jsou Fréchetovské. Dokážeme toto jednoduché pozorování.

Pozorování 2.12. Mějme prostor $\boldsymbol{X}$, množinu $X \subset \boldsymbol{X}$ a bod $x \in \overline{X}$. Za předpokladu, že $\boldsymbol{X}$ má v bodě x spočetnou lokální bázi, existuje nekonečná posloupnost $x_0, x_1, \ldots \in X$ konvergující k x.

Důkaz: Spočetnou lokální bázi $B_0, B_1, \ldots$ bodu x můžeme volit tak, aby $B_0 \supset B_1 \supset \cdots$. Pak stačí volit $x_i \in X \cap B_i$. ■

Můžeme se tedy ptát, jak velká musí být lokální báze, aby prostor nebyl Fréchetovský. V obecném případě stačí první nespočetný kardinál.

Příklad 2.13. Zvolme na ω_1 ideál všech spočetných množin. V ortogonálním doplňku nemůže ležet žádná nekonečná množina a přitom je tento ideál generovaný systémem

$$\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}, \text{ kde } A_\alpha = \{\gamma : \gamma < \alpha\}.$$

Poznamenejme, že z hlediska teorie množin je $A_\alpha = \alpha$.

Stejný systém okolí bude mít bod ω_1 v prostoru $\omega_1 + 1$ se standardní ordinálovou topologií. Takto jsme tedy sestrojili dokonce kompaktní prostor s vahou ω_1, který není Fréchetovský.

V tomto příkladu můžeme ještě pokračovat – prostor $\omega_1 + 1$ je možné vnořit do nespočetné mocniny $\{0,1\}^{\omega_1}$, takže žádný nespočetný součin alespoň dvouprvkových T_1 prostorů nebude Fréchetovský.

Omezíme se proto v následujícím jen na spočetné prostory.

Definice 2.14. Symbolem $\mathfrak{p}$ (pseudointersection number) značíme nejmenší možnou váhu spočetného prostoru, který není Fréchetovský.

Běžná definice čísla $\mathfrak{p}$ je mírně jiná, avšak ekvivalentní.

Pozorování 2.15. Kardinál $\mathfrak{p}$ je možné definovat i následovně: Mohutnost $\mathfrak{p}$ udává nejmenší možnou mohutnost systému množin $\mathcal{A}$ na ω takového, že průnik libovolně konečně mnoha množin z $\mathcal{A}$ je neprázdný, avšak není možné najít pseudoprůnik, tedy nekonečné $X \subset \omega$ splňující $|X \setminus A| < \omega$ pro každé $A \in \mathcal{A}$.

Axiom 2.16. (Martinův) Buď P částečně uspořádaná množina, ve které pro každou nespočetnou množinu $C \subset P$ najdeme trojici prvků x, y, z splňující $x \neq y$, $x, y \in C$, $z \in P$, $z \leq x$, $z \leq y$ (podmínka c.c.c.).

Dále buď $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(P)$ splňující $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$ a pro každou $D \in \mathcal{D}$ a $p \in P$ existuje $q \in D$, $q \leq p$ (podmínka hustoty). Pak existuje množina $F \subset P$, která splňuje:

(1) Pro každé $p, q \in F$ existuje $r \in F$, $r \leq p$, $r \leq q$.
(2) F protíná každou $D \in \mathcal{D}$.

Tvrzení 2.17. Za předpokladu Martinova axiomu je $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, tedy platí: Pro spočetnou množinu M a systém množin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ splňující $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$ a $M \notin \langle \mathcal{A} \rangle$ existuje nekonečná $X \in \mathcal{A}^{\perp}$.

Důkaz: Využijeme Martinův axiom, tedy sestrojíme příslušnou množinu P následujícím předpisem

$$P = \{(n, \sigma, \mathcal{K}) : n \in \omega,\ \sigma \text{ je prosté zobrazení } n \to M, \mathcal{K} \text{ je konečná podmnožina } \mathcal{A}\}$$

$$(n, \sigma, \mathcal{K}) \geq (m, \tau, \mathcal{L}) \Leftrightarrow n \leq m,\ \sigma \subset \tau,\ \mathcal{K} \subset \mathcal{L},\ \forall i \in (m \setminus n) \forall K \in \mathcal{K} \colon \tau(i) \notin K.$$

Ověříme podmínku c.c.c.: Uvažme nespočetnou množinu $C \subset P$. Protože je M spočetná, existuje jen spočetně mnoho různých funkcí typu $n \to M$. Najdeme tak v C dva různé prvky

$$x = (n, \sigma, \mathcal{K}), y = (n, \sigma, \mathcal{L}).$$

Pak stačí zvolit $z = (n, \sigma, \mathcal{K} \cup \mathcal{L})$.

Nyní sestrojíme systém hustých množin $\mathcal{D}$. Bude se skládat z množin typu $D_m = \{(n, \sigma, \mathcal{K}) \in P : n \geq m\}$ pro $m \in \omega$ a $D_A = \{(n, \sigma, \mathcal{K}) \in P : A \in \mathcal{K}\}$ pro $A \in \mathcal{A}$. Těchto množin je méně než kontinuum a zřejmě jsou všechny husté. Dle Martinova axiomu tak existuje množina $F \subset P$ splňující podmínky (1) a (2).

Díky podmínce (2) obsahuje F trojice $(n, \sigma, \mathcal{K})$ pro libovolně velké n. Díky podmínce (1) musí být pro libovolné prvky $(n, \sigma, \mathcal{K}), (m, \tau, \mathcal{L}) \in F$ funkce σ a τ kompatibilní. Můžeme tak uvážit sjednocení všech těchto funkcí z F, což bude prostá funkce $f \colon \omega \to M$. Ukážeme, že nekonečná množina $X = f[\omega]$ skutečně leží v $\mathcal{A}^{\perp}$.

Uvažme $A \in \mathcal{A}$. Množina F protíná (opět z podmínky (2)) D_A v nějakém bodě $(n, \sigma, \mathcal{K})$. Pak díky podmínce (1) pro libovolné $(m, \tau, \mathcal{L})$, kde $m > n$ a $i \in (m \setminus n)$, musí být $\tau(i)$ mimo množinu A. Průnik $X \cap A$ tak může obsahovat nanejvýš prvky $\sigma[n]$, tedy jen konečně mnoho, což jsme chtěli ukázat. ∎

2.2 Součiny ideálů

Definice 2.18. Mějme indexovou množinu I a systém ideálů $\mathcal{I}_i$ na nosných množinách M_i pro $i \in I$. Definujeme součin $\prod_{i\in I} \mathcal{I}_i$ na nosné množině $\prod_{i\in I} M_i$ coby ideál generovaný množinami tvaru $\pi_i^{-1}[A]$ pro $i \in I$ a $A \in \mathcal{I}_i$.

Pozorování 2.19. Za předpokladů předchozí definice uvažme $X \subset \prod_{i\in I} M_i$. Pak je ekvivalentní:

- $X \in (\prod_{i\in I} \mathcal{I}_i)^\perp$,
- Pro všechna $i \in I$ platí $\pi_i[X] \in \mathcal{I}_i^\perp$ a vzor žádné $x \in M_i$ v π_i neprotíná X v nekonečně bodech.

Pozorování 2.20. Prostor $\boldsymbol{X}(\prod_{i\in I} \mathcal{I}_i)$ je podprostorem součinu prostorů $\prod_{i\in I} \boldsymbol{X}(\mathcal{I}_i)$.

Předešlé pozorování mluví o podprostoru, tedy naskýtá se otázka, kolik toho mohou přebývající prvky pokazit. Jak říká následující tvrzení, pro účely této práce příliš mnoho ne.

Tvrzení 2.21. Mějme n-tici ideálů $\mathcal{I}_0, \ldots, \mathcal{I}_{n-1}$ postupně na nosných množinách $M_0, \ldots, M_{n-1}$. Předpokládejme, že pro libovolné $I \subset n$ je $\prod_{i\in I} \mathcal{I}_i$ ortogonálně uzavřený. Pak součin prostorů $\boldsymbol{X} = \prod_{i\in n} \boldsymbol{X}_i$ je Fréchetovský.

Důkaz: Indukcí podle n. Pro $n = 1$ se jedná o poslední bod pozorování 2.10, předpokládejme $n \geq 2$. Uvažme $X \subset \boldsymbol{X}$ a bod $z \in \overline{X}$. Pokud $\pi_i(z) \neq \infty$ pro některé $i \in n$, stačí se omezit na otevřený podprostor $\pi_i^{-1}(\pi_i(z))$ a výsledek plyne z indukčního předpokladu, kde vynecháme ideál $\mathcal{I}_i$. Předpokládejme tedy, že tato možnost nenastala a $z = \infty$.

Dále, pokud existuje i takové, že v uzávěru množiny $X \cap \pi_i^{-1}(\infty)$ leží bod $\infty \in \boldsymbol{X}$, stačí se omezit na podprostor $\pi_i^{-1}(\infty)$ a výsledek plyne z indukčního předpokladu při vynechání $\mathcal{I}_i$. Předpokládejme tedy, že taková možnost nenastane. Pak pro

$$X_2 = X \cap \prod_{i\in I} M_i \text{ platí } \infty \in \overline{X_2}.$$

Tedy $X_2 \notin \mathcal{I} = \prod_{i\in I} \mathcal{I}_i$, takže z předpokladu $X_2 \notin \overline{\mathcal{I}}$, tedy existuje $Y' \in \mathcal{I}^\perp$, které má s X_2 nekonečný průnik, tedy existuje nekonečná spočetná podmnožina $Y \in \mathcal{P}(X_2) \cap \mathcal{I}^\perp$, která tvoří hledanou posloupnost. ∎

Čtenář by se mohl pozastavit nad tím, proč předchozí tvrzení vyžaduje ortogonální uzavřenost i všech částečných součinů. Jediný důvod je popravdě degenerovaný ideál, ve kterém leží celá jeho nosná množina. Takový činitel způsobí, že pak celý součin bude degenerovaný, tedy Fréchetovský, avšak jakmile vynásobíme prostor, který není Fréchetovský s čímkoli, výsledek opět nebude Fréchetovský.

Pokud bychom takové ideály v součinu zakázali, stačí ověřit podmínku pro součin všech ideálů, jak naznačuje následující tvrzení.

Tvrzení 2.22. Jakmile je součin ideálů $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ na množinách M, N ortogonálně uzavřený, a $N \notin \mathcal{J}$, tak i $\mathcal{I}$ je ortogonálně uzavřený.

Důkaz: Uvažme $X \subset M$, $X \notin I$. Chceme najít $Y \subset M$ splňující $Y \in \mathcal{I}^\perp$, ale $X \notin \{Y\}^\perp$, tím dokážeme ortogonální uzavřenost $\mathcal{I}$.

Protože $N \notin \mathcal{J}$, neleží $X \times N$ v součinu $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$, který je ortogonálně uzavřený, najdeme $Y_0 \in (\mathcal{I} \times \mathcal{J})^\perp$, které protíná $X \times N$ v nekonečné množině. Hledaným Y je $\pi_0[Y_0]$. ∎

Tím jsme popsali, jak obecně poznat, zda je součin prostorů $\boldsymbol{X}_i$ Fréchetovský. Tento nástroj je však zatím slabý (ostatně jde víceméně jen o přeformulování), silnější tvrzení pro speciální typy prostorů bude uvedeno v kapitole 4. Ještě ukážeme způsob, jak naopak docílit toho, aby součin prostorů Fréchetovský nebyl.

Pozorování 2.23. Nechť $\mathcal{I}_i$ pro $i \in I$ jsou ideály na stejné nosné množině M. Pak prostor $\boldsymbol{X}(\langle\bigcup_{i\in I} I_i\rangle)$ je možné vnořit do prostoru $\prod_{i\in I} \boldsymbol{X}(\mathcal{I}_i)$ na diagonálu, tedy bodu $x \in \boldsymbol{X}(\langle\bigcup_{i\in I} I_i\rangle)$ přiřadíme odpovídající prvek $(x, x, \ldots, x)$ na diagonále.

Důsledek 2.24. Mějme indexovou množinu I a ideály $\mathcal{I}_i$ na jedné nosné množině M pro $i \in I$. Předpokládejme, že

$$M \notin \left\langle \bigcup_{i\in I} I_i \right\rangle$$

a přitom

$$M \in \overline{\bigcup_{i\in I} I_i}.$$

Pak $\prod_{i\in I} \boldsymbol{X}(\mathcal{I}_i)$ není Fréchetovský.

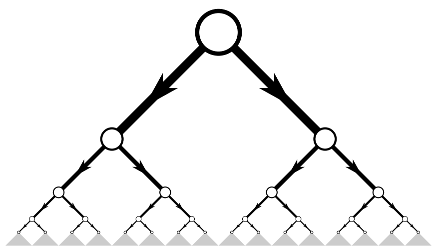
Kapitola 3

AD systémy

Ideály popisují lokální vlastnosti prostoru ve zcela obecné rovině. Dále se budeme zabývat jistým speciálním typem ideálů, který je na úkor obecnosti, ale zato má řadu užitečných vlastností – například umožní konstruovat kompaktní prostory.

Definice 3.1. Skoro disjunktním systémem (stručně AD systémem z anglického almost disjoint) na nekonečné nosné množině M rozumíme systém nekonečných množin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$, takový, že průnik každých jeho dvou různých prvků je konečný.

Pozorování 3.2. Na spočetné množině existuje AD systém mohutnosti kontinua.

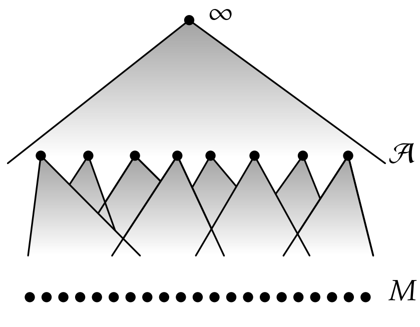


Obrázek 3.1. AD systém mohutnosti c

Důkaz: Uvažme nekonečný (spočetný) zakořeněný binární strom, ve kterém má každý vrchol dva syny. V tomto stromě existuje kontinuum mnoho nekonečných cest od kořene. Každé dvě různé takové cesty se přitom protínají jen v konečně mnoho vrcholech a tvoří tak na množině vrcholů hledaný AD systém. ■

3.1 Prostor

Definice 3.3. Pro AD systém $\mathcal{A}$ na množině M definujeme topologický prostor $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ na nosné množině $M \cup \mathcal{A} \cup \{\infty\}$ (předpokládáme, že tyto tři množiny jsou disjunktní) s následující subbází obojetných množin: Obojetné množiny jsou nutně jednoprvkové množiny $\{x\}$ za každé $x \in M$ a množiny $\{A\} \cup A$ za každé $A \in \mathcal{A}$ (a jejich doplňky).



Obrázek 3.2. Prostor $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$.

Tvrzení 3.4. Pro libolný AD systém $\mathcal{A}$ je $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ kompaktní a T_2 prostor.

Důkaz: Vlastnost T_2 plyne z toho, že každé dva body je možné oddělit subbázovou obojetnou množinou. Kompaktnost stačí ověřit pro pokrytí prvky subbáze. Uvažme pokrytí prvky subbáze. Bod ∞ musí být pokryt doplňkem jednoprvkové množiny (což je triviální případ) nebo některé množiny tvaru $\{A\} \cup A$ pro $A \in \mathcal{A}$. Pak musí být něčím pokrytý bod A – máme tři možnosti, čím:

a) Množinou $\{A\} \cup A$, tak jsme pokryli prostor dvěma množinami.
b) Doplňkem množiny $\{x\}$ pro $x \in M$, pak zbývá pokrýt jediný bod x, na který nám stačí jediná další množina.
c) Doplňkem množiny $\{B\} \cup B$ pro $B \in \mathcal{A}$ různé od A. Pak zbývá pokrýt jen konečně bodů v průniku $A \cap B$. Na pokrytí těchto bodů pak stačí konečně mnoho množin. ■

Pozorování 3.5. Pro AD systém $\mathcal{A}$ je prostor $\boldsymbol{X}(\langle\mathcal{A}\rangle)$ podprostorem prostoru $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$.

Ještě si rozmyslíme, že body z $\mathcal{A}$, které jsou navíc, nepřekáží při zkoumání vlastností týkajících se Fréchetovskosti. K tomu poslouží série dalších pozorování.

Pozorování 3.6.

- Leží-li bod $A \in \mathcal{A}$ prostoru $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ v uzávěru množiny $X \subset \boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$, ale mimo množinu X samotnou, obsahuje $X \cap A$ nekonečně mnoho bodů a libovolná posloupnost různých prvků této množiny konverguje k $\mathcal{A}$.
- Leží-li bod ∞ prostoru $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ v uzávěru množiny $X \subset \mathcal{A}$, pak je X nekonečná a libovolná posloupnost různých prvků z X konverguje k ∞.
- Prostor $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ je Fréchetovský právě tehdy, když $\boldsymbol{X}(\langle\mathcal{A}\rangle)$ je Fréchetovský.

3.2 Terminologie

Definice 3.7. Maximální AD systém (stručně MAD systém) je takový AD systém, že na stejné nosné množině neexistuje AD systém, který by byl jeho vlastní nadmnožinou.

Pozorování 3.8. Z Zornova lemmatu plyne, že každý AD systém je možné rozšířit na MAD systém.

Definice 3.9. Pro AD systém $\mathcal{A}$ na množině M definujeme restrikci $\mathcal{A} \restriction M_0$ na nekonečné množině $M_0 \subset M$ coby AD systém $\{M_0 \cap A : A \in \mathcal{A} \setminus \{M_0\}^\perp\}$. Řekneme, že AD systém $\mathcal{A}$ je anti-MAD, pokud pro žádnou množinu M_0 není $A \restriction M_0$ nekonečným MAD systémem.

Poznámka 3.10. Poněkud degenerovaný případ nastává pro konečný AD systém $\mathcal{A}$. Takový AD systém je vždy anti-MAD, nicméně může se jednat i o MAD systém (pokrývá-li $\bigcup\mathcal{A}$ až na konečně prvků nosnou množinu). Toto je přitom jediný případ, kdy může být anti-MAD současně MADem. Ačkoli definice a tvrzení připouští i konečné AD systémy, jedná se o okrajové případy a zpravidla uvažujeme nekonečné AD systémy.

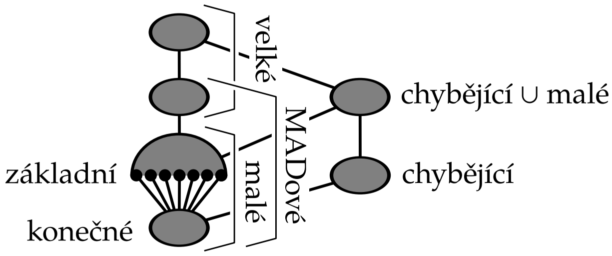
Různé typy množin v AD systémech jsou v různých článcích značeny a nazývány různě. Následující definice udává vlastní komplexní terminologii v této oblasti.

Definice 3.11. Pro AD systém $\mathcal{A}$ na M hovoříme o následujících typech množiny $X \subset M$.

- Řekneme, že X je základní, pokud $X \in \mathcal{A}$.
- Řekneme, že X je malá, pokud $X \in \langle\mathcal{A}\rangle$.
- Řekneme, že X je nemalá, pokud $X \notin \langle\mathcal{A}\rangle$, tedy není malá.
- Řekneme, že X je chybějící, pokud $X \notin \mathcal{A}$ a $\mathcal{A} \cup \{X\}$ tvoří stále AD systém, ekvivalentně X je nekonečná a $X \in \mathcal{A}^\perp$.
- Řekneme, že X je velká, pokud má s nekonečným počtem prvků $\mathcal{A}$ nekonečný průnik, formálně $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap X| = \omega\}| = \omega$.

- Řekneme, že X je nevelká, pokud není velká.
- Řekneme, že X je MADová, pokud je konečná nebo $\mathcal{A} \restriction X$ je MAD systém, ekvivalentně $X \in \overline{\mathcal{A}}$.

Pro upřesnění, že hovoříme o AD systému $\mathcal{A}$, budeme používat pojmy $\mathcal{A}$-základní, $\mathcal{A}$-malá, ...



Obrázek 3.3. Znázornění pojmů v AD systému ve svazu $\mathcal{P}(M)$

Pozorování 3.12.

- Malé množiny tvoří ideál.
- MADové množiny tvoří ideál.
- Nevelké množiny tvoří ideál.
- Chybějící a konečné množiny dohromady tvoří ideál.
- Každá chybějící množina je nemalá a současně nevelká.
- Každá množina, která je současně nemalá a nevelká je sjednocením malé a chybějící.
- V MAD systému jsou velké množiny ekvivalentní nemalým.
- Množina je malá právě tehdy, když je nevelká a současně MADová.

Pozorování 3.13. Libovolný nekonečný MAD systém $\mathcal{A}$ na množině M splňuje $M \notin \langle \mathcal{A} \rangle$, ale $M \in \overline{\mathcal{A}}$. AD systém je anti-MAD právě tehdy, když $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ je Fréchetovský.

Definice 3.14. O AD systému řekneme, že je úplně separabilní, pokud pod každou velkou množinou X najdeme základní $Y \subset X$.

Pozorování 3.15. Následující tvrzení o AD systému jsou ekvivalentní

- Je to úplně separabilní MAD systém.
- V každé nemalé množině je možné najít základní podmnožinu.

3.3 Dělení MAD systému

V této sekci předvedeme konstrukci založenou na [2] vylepšenou E. K. van Douwenem. Na základě pozorování 2.23 a 3.13 stačí pro konstrukci 2-protipříkladu sestrojit rozklad nekonečného MAD systému na dva anti-MADy. Princip konstrukce rozkladu spočívá v tom, že se pokaždé pokusíme MAD systém rozdělit nějak, a v případě neúspěchu se zaměříme již jen na část, která kýženou vlastnost kazí. Pokud bychom takto dopadli pokaždé, najdeme nakonec pomocí následujícího lemmatu o nemalém pseudoprůniku spor.

Obecně takto sestrojíme rozklad MAD systému až na spočetně AD systémů tak, že sjednocení méně z nich bude vždy anti-MAD. Tím nedocílíme přímo k-protipříkladu, ale získáme alespoň soubor kompaktních prostorů, pro které diagonála součinu všech není Fréchetovská, ale diagonály v součinech vlastního podsouboru z nich jsou Fréchetovské.

Lemma 3.16. Mějme v AD systému nekonečnou posloupnost do sebe zanořených nemalých množin $X_0 \supset X_1 \supset \cdots$. Pak existuje jejich nemalý pseudoprůnik, tedy nemalá množina Y taková, že pro každé i je $Y \setminus X_i$ konečná.

Mohli bychom toto tvrzení dokázat elementárně, ale počkáme si na obecnější verzi coby důsledek tvrzení 4.7.

Lemma 3.17. Mějme MAD systém $\mathcal{M}$ a podsystém $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

- Každá množina X je $\mathcal{M}$-velká právě tehdy když je $\mathcal{A}$-velká.
- $\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}$ je anti-MAD.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Uvažme $(\mathcal{M}\setminus\mathcal{A})$-nemalou množinu X. Najdeme $A \in \mathcal{A}$, která má s X nekonečný průnik. Je-li X $\mathcal{M}$-malá, musí taková množina $A \in \mathcal{A}$ existovat proto, že jinak by byla X i $(\mathcal{M}\setminus\mathcal{A})$-malá. V opačném případě je X $\mathcal{M}$-velká, tedy i $\mathcal{A}$-velká a z toho plyne existence hledané A. Průnik $A \cap X$ je pak $(\mathcal{M}\setminus\mathcal{A})$-chybějící množinou.

$\Leftarrow$ Každá $\mathcal{A}$-velká X je zřejmě i $\mathcal{M}$-velká. Naopak uvažme pro spor X, která je $\mathcal{A}$-nevelká, ale $\mathcal{M}$-nemalá. Je tak i $\mathcal{A}$-nemalá a najdeme $\mathcal{A}$-chybějící $Y = X \setminus Z$, kde Z je $\mathcal{M}$-malá. Pak je $(\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}) \restriction Y = \mathcal{M} \restriction Y$, jedná se tak o $(\mathcal{M}\setminus\mathcal{A})$-MADovou nemalou množinu. ∎

Lemma 3.18. Buď $\mathcal{M}$ libovolný nekonečný MAD systém na spočetné M a mějme jeho rozklad na disjunktní části $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Předpokládejme, že každá $\mathcal{M}$-velká množina je i $\mathcal{B}$-velká. Pak existuje rozklad $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ a $\mathcal{M}$-velká množina $X \subset M$ splňující, že každá $\mathcal{M}$-velká množina $Y \subset X$ je $\mathcal{C}$-velká i $\mathcal{D}$-velká.

Důkaz: Uvažujme libovolnou spočetnou množinu rozkladů $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}_i$ $(i \in \omega)$, $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{D}_i = \emptyset$ navíc takovou, že pro libovolnou $I \subset \omega$ je

$$\left|\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i \cap \bigcap_{i\notin I} \mathcal{D}_i\right| \leq 1.$$

Přitom pro $I = \omega$, resp. $I = \emptyset$ je vzorcem uvnitř absolutní hodnoty míněno $\bigcap_{i\in\omega} \mathcal{C}_i$, resp. $\bigcap_{i\in\omega} \mathcal{D}_i$.

Takový spočetný soubor existuje vzhledem k tomu, že $\mathcal{B}$ má mohutnost nejvýše kontinuum. Množinu $\{0,1\}^\omega$ je totiž možné rozdělit na jednotlivé body pomocí řezů v jednotlivých projekcích.

Ukážeme, že pro některý z těchto rozkladů najdeme požadovanou X. Sporem – kdyby ne, začneme s (velkou) $X_0 = M$ a pro $i = 0, 1, \ldots$ provádíme následující rekurentní postup:

Množina X_i je $\mathcal{M}$-nemalá, tedy existuje její $\mathcal{M}$-velká podmnožina X'_{i+1}, která je $\mathcal{C}_i$-nevelká nebo $\mathcal{D}_i$-nevelká. Označme $\mathcal{E}_i$ systém $\mathcal{C}_i$ nebo $\mathcal{D}_i$ tak, aby množina X'_{i+1} byla $\mathcal{E}_i$-nevelká. Má tedy nekonečný průnik pouze s konečně prvky $\mathcal{E}_i$, odebráním těchto prvků získáme $\mathcal{M}$-velkou množinu

$$X_{i+1} = X'_{i+1} \setminus \bigcup \left\{E \in \mathcal{E}_i : \left|E \cap X'_{i+1}\right| = \omega\right\},$$

přičemž $X_{i+1} \in \mathcal{E}_i^\perp$.

Využitím lemmatu 3.16 nalezneme Y coby $\mathcal{M}$-nemalý pseudoprůnik všech X_i. Nicméně Y nemůže mít nekonečný průnik s žádným prvkem $\bigcup\{\mathcal{E}_i : i \in \omega\}$. Doplněk tohoto systému do $\mathcal{B}$ je jen $\bigcap\{\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}_i : i \in \omega\}$, který je na základě volby rozkladů nejvýše jednoprvkový. To je spor s tím, že Y je $\mathcal{B}$-velká množina. ∎

Navíc v AD systémech platí obdoba 2.23.

Pozorování 3.19. Mějme systém AD systémů $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ na jedné nosné množině M. Předpokládejme navíc, že $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ je opět AD systém. Pak $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ lze vnořit do $\prod_{i\in I} \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$. Provedeme to tak, že body $x \in M$ a ∞ pošleme na příslušný prvek diagonály a bod $A \in \mathcal{A}_i$ pošleme na bod, jehož všechny souřadnice jsou ∞, jen i-tá je rovna A.

Věta 3.20. Pro libovolné $2 \le n \in \omega$ existuje nekonečný MAD systém $\mathcal{M}_n$ na spočetné množině a jeho rozklad na disjuntkní části $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_{n-1}$ takový, že sjednocení libovolných $n-1$ z nich je anti-MAD. Dokonce existuje nekonečný MAD systém $\mathcal{M}_\omega$ na spočetné množině a jeho rozklad na spočetně mnoho částí takový, že sjednocení všech částí až na jednu je anti-MAD.

Důkaz: Napřed zvolíme libovolný nekonečný MAD systém $\mathcal{M}$ na M_0 a aplikujeme předchozí lemma 3.18 pro $\mathcal{A} = \emptyset$, $\mathcal{B} = \mathcal{M}$. To dává množinu M_1 a rozklad $\mathcal{M} \restriction M_1$ na dva AD systémy $\mathcal{C}_0 \restriction M_1$, $\mathcal{D}_0 \restriction M_1$, které mají shodné velké množiny. Pokračujeme rekurentně opětovným aplikováním lemmatu pro

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j \le i} \mathcal{C}_j \restriction M_{i+1}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{D}_i \restriction M_{i+1},$$

čímž obdržíme rozklad AD systému $\mathcal{D}_i \restriction M_{i+2}$ na $\mathcal{C}_{i+1}$ a $\mathcal{D}_{i+1}$ na nosné množině M_{i+2}, kde $M_{i+2} \subset M_{i+1}$, M_{i+2} je $\mathcal{M}$-nemalá a obě části rozkladu mají stejné velké množiny jako původní $\mathcal{D}_i \restriction M_{i+2}$. Takto spolu s tvrzením 3.17 dostáváme kýžený rozklad nekonečného MAD systému $\mathcal{M} \restriction M_{n-1}$ na n anti-MADů

$$\mathcal{C}_0 {\restriction} M_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{n-2} {\restriction} M_{n-1} \cup \mathcal{D}_{n-2} {\restriction} M_{n-1}.$$

Pro spočetný případ opět použijeme lemma 3.16 a najdeme $\mathcal{M}$-nemalý pseudoprůnik M množin $M_0 \supset M_1 \supset \cdots$. Pak je $\mathcal{M} \restriction M$ opět nekonečný MAD systém, který má stejné velké množiny jako každé $\mathcal{C}_i \restriction M$. Hledaný rozklad tedy postavíme z jednotlivých $\mathcal{C}_i$, přičemž k $\mathcal{C}_0$ přidáme přebývající $\bigcap_{i \in \omega} \mathcal{D}_i$. ■

Důsledek 3.21. Existuje 2-protipříklad. Navíc pro libovolné $3 \le n \le \omega$ existuje soubor kompaktních prostorů $\boldsymbol{X}_i$ pro $i \in n$ a dále $\mathrm{X} \subset \prod_{i \in n} \boldsymbol{X}_i$, $x \in \overline{\mathrm{X}}$, že

- Neexistuje posloupnost z prvků X konvergující k x.
- Pro každé $i \in n$ je podprostor na množině $\pi_{\neg i}\left[\overline{\mathrm{X}}\right]$ Fréchetovský.

Kapitola 4

AD systémy v konečných dimenzích

V této kapitole práce zavádí konečné součiny AD systémů $\prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$ na množině $\prod_{i\in n} M_i$, kde $\mathcal{A}_i$ je AD systém na množině M_i. Narozdíl od případu ideálů nebo topologických prostorů nelze chápat součin AD systémů jako nový AD systém, a proto budeme chápat tento součin čistě formálně a definujeme pro něj opět pojmy AD systémů.

Definice 4.1. Řekneme, že podmnožina $X \subset \prod_{i\in n} M_i$ je prostá, právě když jsou prosté všechny její jednoduché projekce, čili pro každé $x \in M_i, i \in n$ je

$$|\pi_i^{-1}(x) \cap X| \leq 1.$$

Definice 4.2. Pro formální součin AD systémů $\mathcal{A} = \prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$ na součinu $M = \prod_{i\in n} M_i$ označíme za $\mathcal{A}$-základní ty množiny $X \subset M$, které jsou vzorem některé $\mathcal{A}_i$-základní množiny v jednoduché projekci π_i. Dále za $\mathcal{A}$-malé označíme množiny ležící v ideálu $\prod_{i\in n}\langle \mathcal{A}_i \rangle$. Množiny, které nejsou malé, nazýváme nemalé.

Pozorování 4.3. Prostá podmnožina je $\mathcal{A}$-malá právě tehdy, když leží v ideálu generovaném $\mathcal{A}$-základními množinami.

Definice 4.4. Pro formální součin AD systémů $\mathcal{A} = \prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$ na součinu $M = \prod_{i\in n} M_i$ označíme za $\mathcal{A}$-chybějící ty množiny $X \subset M$, které jsou prosté a pro každé $i \in n$ je $\pi_i[X]$ $\mathcal{A}_i$-chybějící.

Pozorování 4.5. Nekonečná prostá množina je $\mathcal{A}$-chybějící právě tehdy, když leží v ortogonálním doplňku ideálu $\mathcal{A}$-malých množin. Přitom každá nekonečná množina v ortogonálním doplňku ideálu $\mathcal{A}$-malých množin je nadmnožinou $\mathcal{A}$-chybějící.

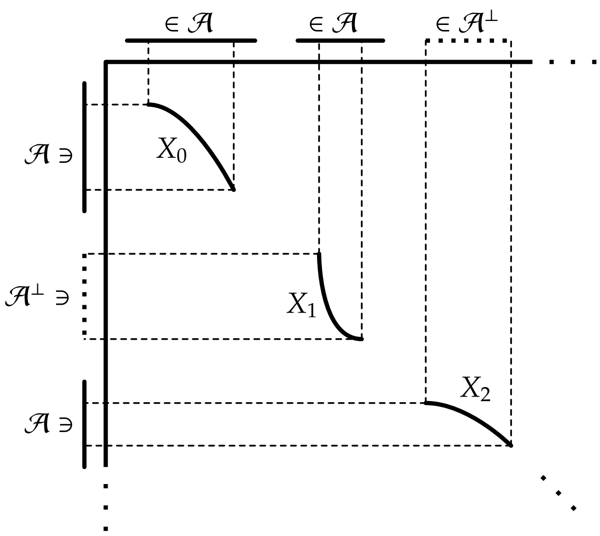
Pozorování 4.6. Pro AD systémy $\mathcal{A}_i$ na množinách M_i a libovolnou prostou množinu $X \subset \prod_{i\in n} M_i$ existuje nekonečná podmnožina $Y \subset X$ taková, že pro každé $i \in n$ je $\pi_i[Y]$ buď $\mathcal{A}_i$-chybějící nebo podmnožinou $\mathcal{A}_i$-základní.

Následuje technické tvrzení, které dává podobnou charakteristiku nemalých množin v součinech AD systémů jako bylo v jednorozměrném případě „chybějící∪malá nebo velká".

Tvrzení 4.7. Nechť $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$ jsou AD systémy postupně na nekonečných množinách $M_0, \ldots, M_{n-1}$. Dále označme formální součin $\mathcal{A} = \prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$ a mějme libovolnou podmnožinu $X \subset \prod_{i\in n} M_i$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- X je $\mathcal{A}$-nemalá.
- Existuje nekonečná posloupnost disjunktních nekonečných množin $X_0, X_1, \ldots \subset X$, které splňují:

  (1) Sjednocení $\bigcup_{k\in\omega} X_k$ je spočetná prostá množina.
  (2) Pro každé $i \in n, k \in \omega$ je $\pi_i[X_k]$ buď $\mathcal{A}_i$-chybějící nebo podmnožinou $\mathcal{A}_i$-základní.
  (3) Pro pevné $i \in n$ a různá $k, l \in \omega$ nikdy není $\pi_i[X_k]$ i $\pi_i[X_l]$ podmnožinou jedné $\mathcal{A}_i$-základní množiny.



Obrázek 4.1. Obecný příklad nemalé množiny v ω^2.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Sestrojíme nekonečné prosté množiny Y_i. Nejprve bez požadavku, aby byly disjunktní a aby jejich sjednocení bylo také prosté. Budou však splňovat požadavky (2) a (3).

Krom Y_k konstruujeme pomocné nemalé množiny Z_k. Začneme s $Z_0 = X$ a pokračujeme následujícím induktivním postupem. V k-tém kroku zvolme nejprve za Y_k libovolnou nekonečnou spočetnou prostou podmnožinu Z_k. To můžeme udělat – kdybychom se při vybírání prosté množiny zasekli, znamenalo by to, že lze nemalou Z_k pokrýt vzory konečně mnoha bodů v jednoduchých projekcích, což je spor s tím, že Z_k je nemalá. Pomocí předchozího pozorování dále zajistíme, aby Y_k splňovala podmínku (2). Na konci cyklu zvolíme

$$Z_{k+1} = Z_k \setminus \bigcup \left\{ \pi_i^{-1}[A] : i \in n, \pi_i(Y_k) \subset A, A \in \mathcal{A}_i \right\}.$$

Tak bude Z_{k+1} stále nemalá množina, protože jsme ze Z_k odebrali konečně mnoho základních množin. Současně touto volbou zajistíme podmínku (3),

Máme tedy prosté nekonečné množiny splňující (2), (3). Kdykoli nyní uvážíme nekonečné podmnožiny $X_i \subset Y_i$, budou stále splňovat podmínku (2) (zřejmě) a podmínku (3) (ta jediná množina, se kterou má X_k nekonečný průnik bude ta samá jako pro Y_k). Stačí tedy zařídit, aby projekce $\pi_i[X_k]$ jednotlivých X_k pro pevné i byly disjuntkní. Buď k_t posloupnost přirozených čísel, ve které je každé přirozené číslo zastoupeno nekonečněkrát. Sestrojíme posloupnost x_t tak, aby pro každé $t \in \omega$ platilo:

- $x_t \in Y_{k_t}$,
- Pro $t' < t$ a $i \in n$ je $\pi_i(x_t) \neq \pi_i(x_{t'})$.

V každém kroku máme na výběr nekonečně mnoho prvků X_{k_t} a protože je X_{k_t} prostá, omezí každá z dodatečných podmínek na projekce jen konečně mnoho prvků. Můžeme tedy postupně tyto x_t najít. Nakonec položíme $X_k = \{x_t : k_t = k\}$.

$\Leftarrow$ Díky podmínce (3) a skutečnosti, že $\mathcal{A}_i$ jsou AD systémy má každá $\mathcal{A}$-základní množina nekonečný průnik s nejvýše jednou X_k. Proto každá $\mathcal{A}$-malá množina má nekonečný průnik s pouze konečně mnoha X_i. Z toho plyne, že $X \supset \bigcup_{k\in\omega} X_k$ musí být nemalá. ∎

Poznámka 4.8. V předchozím tvrzení má každá X_k pro každou projekci dvě možnosti, jaká bude. Celkem je těchto možností jen konečně mnoho, takže je možné dokonce vybrat takovou nekonečnou posloupnost X_k, které se všechny chovají stejně. Čtenáře by mohlo napadnout, zdali by nebylo možné další zobecnění „V každé jednoduché projekci π_i je $\pi_i[\bigcup_{k\in\omega} X_k]$ chybějící nebo jsou projekce $\pi_i[X_k]$ jednotlivých X_k pod různými základními množinami.“ To však vyvrací konstrukce ve větě 3.18: Když rozdělíme nekonečný MAD systém na dva AD systémy, které mají stejné velké množiny, a v jejich součinu uvážíme (nemalou) diagonálu, nemůžou být obě projekce X_k současně podmnožinou základní ani současně chybějící. Nemůže se ale ani stát, že by sjednocení všech X_k bylo v jedné projekci velké a v druhé chybějící.

Důsledek 4.9. V nemalé množině je možné vždy najít spočetnou prostou nemalou množinu.

Důkaz: Jedná se o $\bigcup_{k\in\omega} X_k$ z předchozího tvrzení. ■

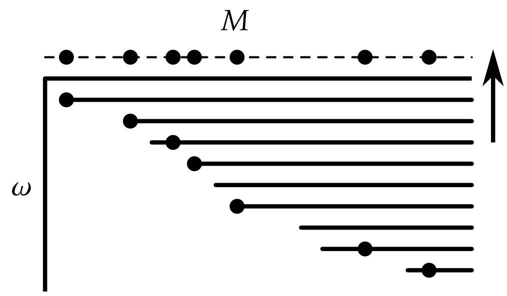
Poznamenejme, že toto není obecná vlastnost topologických prostorů, jak naznačuje již příklad S_ω z úvodu práce. Ještě ukážeme, jak z tohoto důsledku snadno dokázat lemma 3.16, které čtenáři dlužíme z předchozí kapitoly. Předchozí důsledek se neopírá o poznatky z kapitoly 3.3.

Důsledek 4.10. Mějme nekonečnou posloupnost do sebe zanořených $\mathcal{A}$-nemalých množin $M \supset X_0 \supset X_1 \supset \cdots$, kde $\mathcal{A}$ je formální součin konečně mnoha AD systémů a M je kartézský součin jejich nosných množin. Pak existuje nemalá množina Y taková, že pro každé i je $Y \setminus X_i$ konečná.

Důkaz: Buď $\mathcal{B}$ prázdný AD systém na nosné množině ω. Uvažme množinu $X \subset \omega \times M$ definovanou předpisem

$$X = \{(i, x) : i \in \omega,\ x \in X_i\}.$$

Tato množina je $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})$-nemalá a proto existuje její nemalá prostá podmnožina Y'. Pak $Y = \pi_{\neg 0}(Y')$ je opět nemalá a pro každé i splňuje $|Y \setminus X_i| \le i$. ■



Obrázek 4.2. Znázornění konstrukce pseudoprůniku pomocí prosté podmnožiny.

Nyní máme prostředky k dokázání poněkud technického tvrzení, které bude nástrojem pro konstrukci prostorů, jejichž součin je Fréchetovský. Nejedná se jen o přímočarou obměnu tvrzení 2.21, ale navíc se stačí omezit na ověřování existence konvergující podposloupnosti v prostých množinách, které jsou nemalé v pevném nadsystému.

Lemma 4.11. Uvažme n trojic $(M_0, \mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0), \ldots, (M_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{B}_{n-1})$ a předpokládejme, že pro každé $i \in n$ je $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}_i$ a $\mathcal{B}_i$ je AD systém na nosné množině M_i. Pak je ekvivalentní:

- pro každé $I \subset n$ a každou prostou $\mathcal{B}$-nemalou podmnožinu $X \subset \prod_{i\in I} M_i$ existuje $\mathcal{A}$-chybějící $Y \subset X$, kde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ značí formální součiny

$$\mathcal{A} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{B} = \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$$

- Prostor

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_0) \times \cdots \times \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_{n-1})$$

je Fréchetovský.

Důkaz: Zpětná implikace je zřejmá, dokážeme dopřednou implikaci.

Indukcí, primárně podle počtu neprázdných $\mathcal{B}_i$, sekundárně podle n. Pro $n = 0$ je jednobodový prostor Fréchetovský. Nejprve poznamenejme, že odebráním některé trojice $(M_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ i přidáním nové trojice $(M, \emptyset, \emptyset)$ zachováme podmínku. V případě odebrání je to zcela jasné, v případě přidání prázdného AD systému stačí zkoumat projekce mimo tento AD systém, protože v prázdném AD systému je každá nekonečná množina chybějící.

Uvažme $X \subset \boldsymbol{X}$ a $z \in \overline{X}$. Chceme najít spočetnou množinu $Y \subset X$, která konverguje k z. Rozebereme triviální případy:

a) Pro nějaké i je $\pi_i(z) \in M_i$, označme $\pi_i(z)$ jako z_i. Pak z_i je izolovaný v $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$ a tak tvoří $\boldsymbol{X}' \subset \boldsymbol{X}$ na nosné množině $\pi_i^{-1}(z_i)$ otevřený podprostor. Proto $z \in \overline{X \cap \boldsymbol{X}'}$ a stačí tak využít Fréchetovu vlastnost prostoru $\boldsymbol{X}'$, který je homeomorfní s $\prod_{j \neq i} \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$. Ten je Fréchetovský dle indukčního předpokladu při vynechání trojice $(M_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$.
b) Pro nějaké i je $\pi_i(z) \in \mathcal{A}_i$. Označme $A = \pi_i(z)$ a podprostor $\boldsymbol{X}_i' \subset \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$ na nosné množině $\{A\} \cup A$. Tato množina je otevřená, takže se opět stačí omezit na $X' = X \cap \boldsymbol{X}_i'$. Navíc je $\boldsymbol{X}_i'$ homeomorfní prostoru z prázdného AD systému na nosné množině A. Po nahrazení M_i za A, a $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i$ za prázdné systémy využijeme indukční předpoklad (původní $\mathcal{A}_i$ prázdné nebylo) a získáme konvergující podposloupnost.

Zbývá případ, kdy $z = \infty$. Uvažme zobrazení

$$\mathrm{type}_i\colon \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i) \to \{0,1,2\}, \quad \mathrm{type}_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in M_i \\ 1 & \text{pro } x \in \mathcal{A}_i \\ 2 & \text{pro } x = \infty \end{cases},$$

$$\mathrm{type}\colon \boldsymbol{X} \to \{0,1,2\}^n, \quad \mathrm{type}((x_0, \ldots, x_{n-1})) = (\mathrm{type}_0(x_0), \ldots, \mathrm{type}_{n-1}(x_{n-1}))$$

Toto zobrazení má jen konečně mnoho možných hodnot, proto existuje takové $t \in \{0,1,2\}^n$, že $\infty \in \overline{X \cap \mathrm{type}^{-1}(t)}$. Označme $X_2 = X \cap \mathrm{type}^{-1}(t)$. Opět rozebereme triviální případy:

a) Pro nějaké $i \in n$ je $\pi_i(t) = 2$. Využijeme indukčního přepodkladu při odebrání $(M_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$, za použití množiny $\pi_{\neg i}[X_2]$, která má v uzávěru ∞. Konvergující posloupnost danou indukčním předpokladem označme $x_0', x_1', \ldots$. Výslednou vybranou posloupnost $x_0, x_1, \ldots$ volíme tak, aby $\pi_{\neg i}(x_k) = x_k'$. Tato posloupnost bude k ∞ konvergovat i v projekci π_i, protože se jedná o konstantní ∞.
b) Pro nějaké $i \in n$ je $\pi_i(t) = 1$. Označme $\boldsymbol{X}_i'$ podprostor $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$ na nosné množině $\{\infty\} \cup \mathcal{A}_i$. Celé $X_2 \cup \{\infty\}$ leží v $\pi_i^{-1}[\boldsymbol{X}_i']$ a stačí se proto omezit na součin, kde je $\boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$ nahrazeno $\boldsymbol{X}_i'$. Prostor $\boldsymbol{X}_i'$ je homeomorfní prostoru z prázdného AD systému na množině $\mathcal{A}_i$ a existence konvergentní podposloupnosti tak plyne z indukčního předpokladu (nahradíme neprázdné $\mathcal{A}_i$ za prázdné).

Zbývá případ, kdy $t = (0, 0, \ldots, 0)$. Označme formální součiny

$$\mathcal{A} = \prod_{i \in n} \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{B} = \prod_{i \in n} \mathcal{B}_i.$$

Víme, že X_2 je $\mathcal{A}$-nemalá. Zbývá rozebrat dvě možnosti:

a) X_2 je $\mathcal{B}$-malá. Pak je možné rozdělit X_2 na konečně mnoho částí takových, že každá z nich leží pod $\mathcal{B}$-základní. Alespoň jedna z těchto částí bude $\mathcal{A}$-nemalá, označme ji $X_3 \subset \pi_i^{-1}(B)$, kde $i \in n$, $B \in \mathcal{B}_i$. Opět je podprostor $\boldsymbol{X}_i' \subset \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$ na nosné množině $\{\infty\} \cup B$ homeomorfní prostoru z prázdného AD systému na množině B a existence konvergentní posloupnosti plyne z indukčního předpokladu.

b) X_2 je $\mathcal{B}$-nemalá. Pomocí důsledku 4.9 můžeme najít prostou $\mathcal{B}$-nemalou $X_3 \subset X_2$. Konečně využijeme předpoklad ze znění dokazovaného tvrzení, který dává chybějící podmnožinu. Ta je hledanou konvergentní posloupností. ∎

Poznámka 4.12. Opět podobně jako u ideálů můžeme na základě tvrzení 2.22 testovat podmínku předchozího lemmatu jen pro $I = n$ za předpokladu, že všechna $\mathcal{B}_i$ jsou nekonečná.

Ještě dodáme definice ostatních pojmů.

Definice 4.13. Buď $\mathcal{A} = \prod_{i \in n} \mathcal{A}_i$ součin AD systémů na součinu nosných množin $M = \prod_{i \in n} M_i$ a $X \subset M$. Pak:

- Řekneme, že X je $\mathcal{A}$-MADová, pokud pod ní neleží žádná chybějící podmnožina.
- Řekneme, že $\mathcal{A}$ je anti-MAD, pokud všechny $\mathcal{A}$-MADové množiny jsou malé.
- Řekneme, že X je $\mathcal{A}$-velká, pokud v ní existuje nekonečná posloupnost disjunktních nekonečných prostých množin X_k splňující:

  (1) Sjednocení $\bigcup_{k \in \omega} X_k$ je spočetná prostá množina.
  (2) Pro každé $i \in n$, $k \in \omega$ je $\pi_i[X_k]$ podmnožinou $\mathcal{A}_i$-základní.
  (3) Pro pevné $i \in n$ a různá $k, l \in \omega$ nikdy není $\pi_i[X_k]$ i $\pi_i[X_l]$ podmnožinou jedné $\mathcal{A}_i$-základní množiny.

- Řekneme, že množina X je $\mathcal{A}$-nevelká, pokud není $\mathcal{A}$-velká.

Pozorování 4.14. Mějme formální součin AD systémů $\mathcal{A} = \prod_{i \in n} \mathcal{A}_i$.

- Je-li $n = 1$, shodují se pojmy pro součin $\mathcal{A}$ a AD systém $\mathcal{A}_0$.
- Dle tvrzení 4.7 jsou všechny $\mathcal{A}$-velké množiny $\mathcal{A}$-nemalé. Jsou-li navíc všechny $\mathcal{A}_i$ MAD systémy, platí i obrácená implikace.
- Dle lemmatu 4.11 jsou všechny součiny $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ pro $I \subset n$ anti-MADy právě tehdy, když je součin $\prod_{i \in n} \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$ Fréchetovský.

4.1 Silná úplná separabilita

V této sekci předvedeme konstrukci k-protipříkladu za předpokladu existence nekonečného $(k+1)$-úplně separabilního MAD systému a tomu ekvivalentní podmínku.

Definice 4.15. Řekneme, že AD systém $\mathcal{A}$ na M je úplně k-separabilní, pokud v každé $\mathcal{A}^k$-velké množině $X \subset M^k$ existuje podmnožina $Y \subset X$ taková, že všechny jednoduché projekce $\pi_i[Y]$ jsou základní v $\mathcal{A}$. Dále AD systém, který je úplně k-separabilní pro každé nenulové $k \in \omega$ nazveme silně úplně separabilní.

Pozorování 4.16.

- Úplná 1-separabilita je ekvivalentní obyčejné úplné separabilitě z definice 3.14.
- Je-li AD systém úplně k-separabilní, je i úplně k'-separabilní pro všechna $1 \leq k' \leq k$.
- Pro AD sytém $\mathcal{A}$ je ekvivalentní:
  - AD systém $\mathcal{A}$ je úplně k-separabilní MAD systém
  - V každé $\mathcal{A}^k$-nemalé množině existuje podmnožina, jejíž všechny projekce jsou $\mathcal{A}$-základní.

Poznámka 4.17. Terminologie se mírně odlišuje od [4] – tam se totiž pracuje s $[\omega]^k$ namísto ω^k, a proto zde zakazují opakující se souřadnice. Na druhou stranu výrok „AD systém $\mathcal{A}$ je úplně k-separabilní pro všechna $k < k_0$“ má již v obou publikacích stejný význam.

4.1.1 Ekvivalentní podmínka

Existence nekonečného silně úplně separabilního MAD systému působí jako dost odvážný předpoklad. Ukážeme tedy nejprve jeho ekvivalenci s existencí nekonečného MAD systému $\mathcal{A}$, ve kterém každý podsystém $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ mohutnosti menší než kontinuum splňuje, že $\mathcal{B}^n$ je pro každé n anti-MAD. Tato vlastnost zřejmě platí, například za předpokladu rovnosti mezi kardinály $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, tedy například za předpokladu Martinova axiomu. Ještě slabší podmínku pro existenci úplně separabilního MAD systému než $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ si pak předvedeme v příští kapitole.

Lemma 4.18. Buď $\mathcal{A}$ úplně n-separabilní AD systém na M. Pak v každé $\mathcal{A}^n$-velké $X \subset M^n$ existuje kontinuum mnoho různých $Y \subset X$ takových, že všechny jednoduché projekce $\pi_i[Y]$ jsou základní v $\mathcal{A}$.

Důkaz: Skutečnost, že X je velká, dává množiny X_k. Zvolme nekonečné vlastní podmnožiny $Z_k \subset X_k$. Dále zvolme libovolný AD systém C na ω mohutnosti kontinua. Pro každé $C \in C$ je množina $X(C) = \bigcup_{k \in C} Z_k$ stále velká a z definice úplně n-separabilního AD systému dostáváme množinu $Y(C) \subset X(C)$. Zbývá ukázat, že jednotlivé $Y(C)$ jsou různé, Pro spor předpokládejme $Y = Y(C_0) = Y(C_1)$, ale $|C_0 \cap C_1| < \omega$. Pak $Y \subset \bigcup_{k \in C_0 \cap C_1} Z_k$, a má tak nekonečný průnik s některým z těchto konečně mnoha Z_k. Tím i $\pi_0[Y]$ má nekonečný průnik s tímto $\pi_0[Z_k]$ a proto musí být $\pi_0[Y]$ onou základní nadmnožinou $\pi_0[X_k]$. To se však nemohlo stát, protože Y je disjunktní s $X_k \setminus Z_k$. ∎

Tvrzení 4.19. Buď $\mathcal{A}$ úplně k-separabilní MAD systém a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ jeho podsystém mohutnosti menší než kontinuum. Pak $\mathcal{B}^k$ je anti-MAD.

Důkaz: Na základě lemmatu 4.11 stačí ukázat, že pro každé $k' < k$ a pro každou prostou $\mathcal{A}^{k'}$-nemalou množinu X najdeme její $\mathcal{B}^{k'}$-chybějící podmnožinu. Uvažme tedy takovou prostou X. Označme $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(X)$ systém těch podmnožin X, které mají všechny projekce základní. Dle lemmatu 4.18 $|\mathcal{Y}| \geq \mathfrak{c}$. Protože X byla prostá, pro různá $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$ platí $\pi_i(Y_0) \neq \pi_i(Y_1)$. Tedy pro každé $i \in n$ má vlastnost $\pi_i(Y) \in \mathcal{B}$ méně než kontinuum množin $Y \in \mathcal{Y}$. Z toho plyne, že najdeme $Y \in \mathcal{Y}$, že pro všechna $i \in n$ je $\pi_i(Y) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Taková Y je hledaná $\mathcal{B}$-chybějící množina. ∎

Lemma 4.20. Pro každou nekonečnou prostou množinu $X \subset M^n$ $(n \in \omega)$ existuje nekonečná $Y \subset X$ taková, že pro libovolná $i, j < n$ jsou množiny $\pi_i[Y], \pi_j[Y]$ buď shodné nebo disjunktní.

Důkaz: Indukcí podle n. Pokud existují různé indexy $i, j < n$ takové, že množina

$$X_1 = \{x \in X : \pi_i(x) = \pi_j(x)\}$$

je nekonečná, uvažme projekci $\pi_{\neg j}[X_1] \subset M^{k-1}$. Aplikujeme indukční předpoklad, obdržíme $Y_1 \subset \pi_{\neg j}[X_1]$ a kýžená $Y = \pi_{\neg j}^{-1}[X_1] \cap X_1$ splňuje požadované, protože $\pi_j[Y] = \pi_i[Y]$.

Pokud naopak žádná taková dvojice indexů neexistuje, je množina

$$X_2 = \{x \in X : \forall i, j < n : i \neq j \Rightarrow \pi_i(x) \neq \pi_j(x)\}$$

nekonečná. Stačí tedy brát postupně prvky $x_0, x_1, x_2 \ldots \in X_2$ tak, aby pro všechna $i, j < n$ a $k' < k$ platila nerovnost $\pi_i(x_{k'}) \neq \pi_j(x_k)$. Těchto podmínek je pro dané k vždy jen konečně mnoho, a proto vždy zbude nějaký prvek z X_2 na výběr. ∎

Tvrzení 4.21. Nechť $\mathcal{A}$ je MAD systém na ω. Pak existuje MAD systém $\mathcal{B}$ splňující:

(1) Pro všechna $0 < k \in \omega$, pro která platí, že pro každý podsystém $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ mohutnosti menší než kontinuum je $\mathcal{A}_0^k$ anti-MAD, je systém $\mathcal{B}$ úplně k-separabilní.
(2) $\langle \mathcal{A} \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$

Důkaz: Buď I množina všech k splňující podmínku na systém $\mathcal{A}$ v bodě (1) (a chceme tedy pro ně zaručit úplnou k-separabilitu systému $\mathcal{B}$). Uvažme množinu

$$\{(k \in I, X \subset \omega^k) : X \text{ je } \mathcal{A}^k\text{-velká}\}.$$

Tato množina má mohutnost kontinua, očíslujme tedy její prvky kontinuem coby (k_α, X_α), $\alpha \in \mathfrak{c}$. Transfinitní rekurzí do kontinua sestrojíme zobrazení přiřazující každému (k_α, X_α) dvojici

$$(Y_\alpha \subset X_\alpha, (A_{\alpha,0}, \ldots, A_{\alpha,k_\alpha-1})),$$

kde Y je nekonečné a pro všechna $i \in n$ platí $\pi_i[Y_\alpha] \subset A_{\alpha,i} \in \mathcal{A}$. Navíc tak, aby pro pevné α a libovolnou dvojici $i, j < n$ byly množiny $\pi_i[Y_\alpha], \pi_j[Y_\alpha]$ buď shodné nebo disjuntní a aby $A_{i,\alpha} \neq A_{j,\gamma}$ pro $\gamma < \alpha$. To zajistíme následujícím postupem: Položme $\mathcal{A}_\alpha = \{A_{\gamma,i} : \gamma < \alpha, i < k_\gamma\}$. Tento systém má mohutnost menší než kontinuum a dle předpokladu je proto $\mathcal{A}_\alpha^k$ anti-MAD. Můžeme tak zvolit $X'_\alpha \subset X_\alpha$ coby $\mathcal{A}_\alpha^k$-chybějící. Nakonec volíme $Y_\alpha \subset X'_\alpha$ a příslušné $A_{\alpha,i}$ na základě pozorování 4.6 a předchozího lemmatu 4.20.

Z tohoto zobrazení zbývá vybudovat hledaný MAD systém $\mathcal{B}$. Každá $A \in \mathcal{A}$ se vyskytuje coby $A_{\alpha,i}$ v nejvýše jednom kroku α, tedy pouze konečněkrát. Jednotlivé projekce Y_α v ní vytínají disjunktní nekonečné podmnožiny. Nahradíme tedy v takovém případě prvek $A = A_{\alpha,i} \in \mathcal{A}$ prvky $\pi_i[Y_\alpha]$ pro všechna i, pro která $A = A_{\alpha,i}$ a ještě přidáme $A \setminus \bigcup\{\pi_i[Y_\alpha] : A = A_{\alpha,i}\}$, je-li tento doplňek nekonečný.

Tím, že jen každý prvek AD systému nahradíme jeho konečným rozkladem, nezměníme ideál generovaný tímto MAD systémem ani skutečnost, že se jedná o MAD systém. Přidáním jednotlivých $\pi_i[Y_\alpha]$ jsme si zajistili podmínku úplné k-separability. ■

Důsledek 4.22. Pro $1 < n \leq \omega$ jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- Existuje nekonečný MAD systém, který je úplně k-separabilní pro všechna $1 \leq k < n$.
- Existuje nekonečný MAD systém $\mathcal{M}$ takový, že pro každé $1 \leq k < n$ a $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, kde $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$ je $\mathcal{A}^k$ anti-MAD.

4.1.2 Konstrukce k-protipříkladu

Věta 4.23. Mějme dané $1 < k' \leq \omega$. Pokud existuje nekonečný MAD systém na ω, který je úplně k-separabilní pro všechna $k \in k'$, pak pro libovolné $1 < n \leq \omega$ existují kompaktní prostory $\boldsymbol{Y}_i$ $(i \in n)$ takové, že součin $\prod_{i\in n} \boldsymbol{Y}_i$ není Fréchetovský, ale pro libovolnou nesurjektivní funkci $\sigma \colon k \to n$, kde $k \in k'$, je součin $\prod_{j\in k} \boldsymbol{Y}_{\sigma(j)}$ Fréchetovský.

Důkaz: Buď $\mathcal{M}$ daný MAD systém. Sestrojíme disjunktní AD systémy $\mathcal{A}_i$ pro $i \in n$ tak, aby $\bigcup_{i\in n} \mathcal{A}_i = \mathcal{M}$ a položíme $\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{Y}(\mathcal{A}_i)$.

Tím dle 3.19 docílíme, že $\prod_{i\in n} \boldsymbol{Y}_i$ nebude Fréchetovský, zbývá zajistit druhou podmínku. K tomu použijeme lemma 4.11. Stačí zajistit, aby pro každé $k \in k'$, funkci $\sigma \colon k \to n$ a $\mathcal{M}^k$-nemalou prostou množinu $X \subset \omega^k$ existovala $Y \subset X$, která bude $\prod_{j\in k} \mathcal{A}_{\sigma(j)}$-chybějící.

Zavedeme očíslování množiny

$$\{(k, i, X) : k \in k',\ i \in n,\ X \subset \omega^k \text{ je prostá, } \mathcal{M}^k\text{-velká}\}$$

coby $\{(k_\alpha, i_\alpha, X_\alpha)\}$ pro $\alpha \in \mathfrak{c}$. Transfinitní rekurzí sestrojíme systémy $\mathcal{A}_{i,\alpha}$ $(i \in n, \alpha \leq \mathfrak{c})$, přitom budeme značit $\mathcal{A}'_\alpha = \bigcup_{i\in n} \mathcal{A}_{i,\alpha}$. Na začátku jsou všechny $\mathcal{A}_{i,0}$ prázdné, limitní krok je standardní sjednocení. Zbývá popsat případ, kdy se chceme z kroku α dostat do kroku $\alpha + 1$.

Množina X_α je $\mathcal{M}^{k_\alpha}$-velká, proto existuje dle lemmatu 4.18 kontinuum mnoho jejích podmnožin takových, že všechny jednoduché projekce jsou $\mathcal{M}$-základní. Protože $|\mathcal{A}'_\alpha| < \mathfrak{c}$, najdeme $Y_\alpha \subset X_\alpha$ takovou, že všechny projekce $\pi_j[Y_\alpha] \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}'_\alpha$ pro $j \in k_\alpha$. Stanovíme

$$\mathcal{A}_{i_\alpha,\alpha+1} = \mathcal{A}_{i_\alpha,\alpha} \cup \{\pi_j[Y_\alpha] : j \in k_\alpha\}$$

$$\mathcal{A}_{i,\alpha+1} = \mathcal{A}_{i,\alpha} \text{ pro } i \in n, i \neq i_\alpha.$$

Nakonec položíme $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{0,\mathfrak{c}} \cup (\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}'_\mathfrak{c})$ a pro ostatní $0 < i \in n$ položme $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i,\mathfrak{c}}$. Zbývá ukázat, že takto sestrojené prostory $\boldsymbol{Y}_i$ opravdu splňují předpoklady lemmatu 4.11.

Uvažme nesurjektivní $\sigma\colon k \to n$, $X \subset \omega^k$. Najdeme $i \in n$, $i \notin \sigma[k]$ a α, aby $(k, i, X) = (k_\alpha, i_\alpha, X_\alpha)$. Pak Y_α je podmnožina X, jejíž všechny projekce leží v $\mathcal{A}_i$ a je proto $\left(\prod_{j\in k} \mathcal{A}_{\sigma(j)}\right)$-chybějící. ∎

Důsledek 4.24. Za předpokladu existence nekonečného úplně k-separabilního MAD systému (pro $k \in \omega$) existuje $(k+1)$-protipříklad. Za předpokladu existence nekonečného silně úplně separabilního MAD systému existuje k-protipříklad pro všechna $k \leq \omega$.

Kapitola 5

Konstrukce nekonečného úplně k-separabilního MAD systému

Nekonečné úplně separabilní MAD systémy jsou notně zkoumaným objektem, v [5] je dokázána jeho existence za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$, kde $\mathfrak{s}$ je nejmenší mohutnost štěpícího systému a $\mathfrak{a}$ je nejmenší mohutnost nekonečného MAD systému.

Jak je patrné z předchozí kapitoly, pro konstrukci dostatečných protipříkladů na součiny Fréchetovských prostorů nejspíše nebude úplně separabilní MAD systém dostatečně silným objektem a je třeba použít nekonečný úplně k-separabilní MAD systém. Naštěstí pro úplně k-separabilní MAD systém mají součiny AD systémů natolik podobné vlastnosti jako obyčejné AD systémy, že je možné často tvrzení o AD systémech zobecnit.

Stejně tak tomu bude v případě silně úplně k-separabilního AD systému. Zde konkrétně uvedeme zobecnění Shelahovy konstrukce pomocí ω,ω-štěpícího systému.

Úmluva 5.1. Všechny AD systémy v této kapitole budou mít nosnou množinu ω.

5.1 Malé kardinály

Definice 5.2. Řekneme, že množina S štěpí množinu X, pokud obě množiny $X \cap S$ i $X \setminus S$ jsou nekonečné. Štěpící systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\omega)$ je takový, že pro každou nekonečnou $X \subset \omega$ existuje $S \in \mathcal{S}$, která ji štěpí. Systém nazveme ω,ω-štěpícím, pokud pro každou spočetnou posloupnost nekonečných množin $X_0, X_1, \ldots \subset \omega$ existuje $S \in \mathcal{S}$ splňující:

- Pro nekonečně mnoho i je $|X_i \cap S| = \omega$.
- Pro nekonečně mnoho i je $|X_i \setminus S| = \omega$.

Kardinální číslo $\mathfrak{s}$ (splitting number) značí nejmenší možnou mohutnost štěpícího systému a kardinální číslo $\mathfrak{s}_{\omega,\omega}$ značí nejmenší možnou mohutnost ω,ω-štěpícího systému.

Pozorování 5.3. Systém, který je ω,ω-štěpící je štěpící – stačí volit konstantně za všechna X_i dané X.

Definice 5.4. Symbol $\mathfrak{a}$ značí nejmenší mohutnost nekonečného MAD systému. Pro nenulové $n \in \omega$ označme písmenem $\mathfrak{a}_n$ nejmenší možný kardinál, pro který existují AD systémy $\mathcal{A}_i$ pro $i \in n$, $|\mathcal{A}_i| \leq \mathfrak{a}_n$ takové, $\prod_{i \in n} \mathcal{A}_i$ není anti-MAD. Nakonec $\mathfrak{a}_\omega$ definujeme jako minimum všech a_n pro $n \in \omega$.

Pozorování 5.5. Platí rovnost $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$.

Coby přirozené zobecnění $\mathfrak{a}_n$ se naskýtá mohutnost $\mathfrak{p}$ popsaná v definici 2.14 coby nejmenší možná váha spočetného prostoru, který není Fréchetovský. Pro toto kardinální číslo ale zřejmě platí $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s}$. To je opačná nerovnost, než bychom chtěli, je tedy záhodno zvolit těsnější odhad.

Definice 5.6. Uvažme systém funkcí $\mathcal{F}$ z ω do ω. O funkci $f\colon \omega \to \omega$ řekneme, že je to horní mez $\mathcal{F}$, pokud pro každou $\varphi \in \mathcal{F}$ je množina $\{k : f(k) < \varphi(k)\}$ konečná. Kardinálem $\mathfrak{b}$ (bounding number) značíme nejmenší možnou mohutnost systému $\mathcal{F}$, který nemá horní mez.

Tvrzení 5.7. Pro každé n je $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}_n$, tedy i $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}_\omega$.

Důkaz: Uvažme n AD systémů $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$. Předpokládejme

$$\left|\bigcup_{i \in n} \mathcal{A}_i\right| < \mathfrak{b}.$$

Označme $\mathcal{A} = \prod_{i \in n} \mathcal{A}_i$ a uvažme $\mathcal{A}$-nemalou množinu $X \subset \omega^n$. Najdeme její disjunktní podmnožiny $X_0, X_1, \ldots$ na základě charakteristiky 4.7. Každou X_k očíslujeme přirozenými čísly pomocí funkce $\varphi_k \colon X_k \to \omega$.

Pro každou $\mathcal{A}$-základní množinu A sestrojíme funkci f_A danou předpisem:

$$f_A(k) = \begin{cases} \max\{\varphi_k(x) : x \in X_k \cap A\} + 1 & \text{je-li } X_k \cap A \text{ konečná,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dle předpokladu je těchto funkcí méně než $\mathfrak{b}$ a proto existuje jejich horní mez f. Hledaná chybějící množina pak je $\{\varphi^{-1}(f(k)) : k \in \omega\}$. ■

Dále jen pro úplnost zmíníme.

Tvrzení 5.8. Platí

- $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$,
- $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{\omega,\omega}$.

Důkaz je možné najít například v [7]. Jak jsme ukázali v tvrzení 2.17, za předpokladu Martinova axiomu je $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ a všechna popsaná kardinalní čísla se tak rovnají $\mathfrak{c}$, což je poněkud nudný případ.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{b} \arrow[r] & \mathfrak{a}_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{a}_1 \\
\mathfrak{p} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{\omega,\omega} & & &
\end{tikzcd}$$

Obrázek 5.1. Nerovnosti mezi malými kardinály

5.2 Konstrukce

Zafixujme ω,ω-štěpící systém $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha \in \mathfrak{s}_{\omega,\omega}\}$.

Definice 5.9. Pro $\alpha \in \mathfrak{s}_{\omega,\omega}$ budeme značit $S_\alpha^0 = S_\alpha$, $S_\alpha^1 = \omega \setminus S_\alpha$. Dále pro obecnou nekonečnou množinu $X \subset \omega$ definujeme α_X jako nejmenší takové, pro které S_{α_X} štěpí X a ještě definujeme funkci $\sigma_X \colon \alpha_X \to \{0, 1\}$, která pro každé $\alpha < \alpha_X$ splňuje

- $\left|X \cap S_\alpha^{\sigma_X(\alpha)}\right| = \omega$,
- $\left|X \cap S_\alpha^{1-\sigma_X(\alpha)}\right| < \omega$.

Pozorování 5.10. Pokud jsou pro množiny $X, Y \subset \omega$ funkce σ_X, σ_Y nekompatibilní, je průnik $X \cap Y$ konečný.

Našim cílem bude postupně konstruovat silně úplně separabilní AD systém $\mathcal{M}$ tak, aby jednotlivé σ_A byly pro různé $A \in \mathcal{M}$ různé. To při hledání nového prvku pomůže pro zaměření se jen na část velkou $\mathfrak{s}_{\omega,\omega}$. Napřed ale dokážeme pár lemmat.

Lemma 5.11. Uvažme AD systém $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^n$-nemalou množinu $X \subset \omega^n$ a $i \in n$. Pak existuje α, pro které jsou obě množiny $X \cap \pi_i^{-1}[S_\alpha^0]$, $X \cap \pi_i^{-1}[S_\alpha^1]$ nemalé.

Důkaz: Uvažme X_k z charakteristiky nemalých množin 4.7. Pak stačí využít ω,ω-štěpící vlastnost pro soubor množin $\{\pi_i[X_k] : k \in \omega\}$. Že budou obě části $\pi_i^{-1}[S_\alpha^0]$ i $\pi_i^{-1}[S_\alpha^1]$ opět nemalé plyne z opačné implikace v 4.7. ■

Na základě tohoto lemmatu můžeme zobecnit definici funkce σ.

Definice 5.12. Pro daný AD systém $\mathcal{A}$, $i \in n$ a $X \subset \omega^n$ definujeme $\alpha_X^{\mathcal{A},i}$ jako nejmenší možné α z předchozího lemmatu. Dále definujeme funkci $\sigma_X^{\mathcal{A},i}\colon \alpha_X^{\mathcal{A},i} \to \{0,1\}$ tak, aby pro každé $\alpha \in \alpha_X^{\mathcal{A},i}$ splňovala:

- $X \cap \pi_i^{-1}\left[S_\alpha^{\sigma_X^{\mathcal{A},i}(\alpha)}\right]$ je $\mathcal{A}^n$-nemalá,
- $X \cap \pi_i^{-1}\left[S_\alpha^{1-\sigma_X^{\mathcal{A},i}(\alpha)}\right]$ je $\mathcal{A}^n$-malá.

Pozorování 5.13. Pokud $X \subset Y$, či jen $|X \setminus Y| < \omega$, tak $\sigma_X^{\mathcal{A},i} \supset \sigma_Y^{\mathcal{A},i}$.

Pozorování 5.14. Pokud je X $\mathcal{A}^n$-chybějící, tak je $\sigma_X^{\mathcal{A},i} = \sigma_{\pi_i[X]}$.

Lemma 5.15. Uvažme AD systém $\mathcal{A}$ mohutnosti menší než kontinuum, $\mathcal{A}^n$-nemalou množinu $X \subset \omega^n$ a $i \in n$. Pak existuje $\mathcal{A}^n$-nemalá $Y \subset X$ taková, že pro žádné $A \in \mathcal{A}$ nenastane $\sigma_Y^{\mathcal{A},i} \subset \sigma_A$.

Důkaz: Na základě lemmatu 5.11 rozdělíme X na disjunktní $X = X_0 \cup X_1$, kde funkce $\sigma_{X_0}^{\mathcal{A},i}$ a $\sigma_{X_1}^{\mathcal{A},i}$ jsou nekompatibilní. V tomto dělení pokračujeme: X_0 rozdělíme na $X_0 = X_{00} \cup X_{01}$, $X_1 = X_{10} \cup X_{11}$, $X_{00} = X_{000} \cup X_{001}$ a tak dále. Formálně je možné říci, že indexujeme tyto množiny funkcemi $k \to \{0,1\}$ pro $k \in \omega$. Přitom kdykoli funkce $f\colon k \to \{0,1\}$, $g\colon l \to \{0,1\}$ jsou nekompatibilní, tak i příslušné $\sigma_{X_f}^{\mathcal{A},i}$, $\sigma_{X_g}^{\mathcal{A},i}$ jsou nekompatibilní.

Z důsledku 4.10 plyne pro každou funkci $f\colon \omega \to \{0,1\}$ existence množiny X_f coby nemalého pseudoprůniku všech $X_{f\restriction k}$ pro $k \in \omega$. Pak pro různé funkce $f, g\colon \omega \to \{0,1\}$ budou tyto funkce nekompatibilní a díky pozorování 5.13 budou nekompatibilní i funkce $\sigma_{X_f}^{\mathcal{A},i}$ a $\sigma_{X_g}^{\mathcal{A},i}$. Máme tak kontinuum různých nemalých množin X_f, přičemž množiny možných funkcí

$$\{\tau \supset \sigma_{X_f}^{\mathcal{A},i} : \tau\colon \{0,1\} \to \alpha \in \mathfrak{s}_{\omega,\omega}\}$$

jsou disjuntní. Můžeme tak z těchto množin vybrat takovou, která neobsahuje žádnou σ_A pro $A \in \mathcal{A}$, čímž získáme kýžené $Y = X_f$. ∎

Lemma 5.16. Uvažme AD systém $\mathcal{A}$ mohutnosti menší než kontinuum, který splňuje, že pro každou funkci σ existuje nejvýše spočetně mnoho $A \in \mathcal{A}$, pro které $\sigma_A = \sigma$. Dále mějme $\mathcal{A}^n$-nemalou množinu $X \subset \omega^n$ a předpokládejme navíc $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} \leq \mathfrak{a}_n$. Pak existuje $\mathcal{A}^n$-chybějící množina $Y \subset X$ taková, že pro každé $i \in n$ je funkce $\sigma_{\pi_i[Y]}$ různá od původních σ_A pro $A \in \mathcal{A}$. Navíc množiny $\pi_0[Y], \ldots, \pi_{n-1}[Y]$ jsou shodné nebo disjunktní.

Důkaz: Napřed na množinu X aplikujeme předchozí lemma postupně pro všechna $i \in n$. Získáme tak nemalou množinu Z, která splňuje, že pro každé i jsou všechna rozšíření $\tau \supset \sigma_Z^{\mathcal{A},i}$ různá od stávajících σ_A pro $A \in \mathcal{A}$. Navíc můžeme předpokládat, že Z je prostá (z důsledku 4.9). Zbývá sestrojit $\mathcal{A}^n$-chybějící $Y \subset Z$. Tím na základě pozorování 5.14 zajistíme i požadavek na jednotlivé $\sigma_{\pi_i[Y]}$ a dodatečný požadavek na disjunktnost projekcí snadno zajistíme lemmatem 4.20.

K sestrojení Y použijeme AD systémy $\mathcal{A}_i$ mohutnosti menší než $\mathfrak{s}_{\omega,\omega}$ zvolené takto: Pro každé $i \in n$ a $\alpha < \alpha_Z^{\mathcal{A},i}$:

(1) Až na konečně mnoho prvků je možné pokrýt množinu

$$Z \cap \pi_i^{-1}\left[S_\alpha^{1-\sigma_Z^{\mathcal{A},i}(\alpha)}\right]$$

konečně mnoha $\mathcal{A}^n$-základními množinami. Zvolme jedno takové pokrytí a za každou základní množinu tvaru $\pi_j^{-1}[A]$ umístíme A do $\mathcal{A}_j$.

(2) Do $\mathcal{A}_i$ umístíme všechny $A \in \mathcal{A}$, pro které $\sigma_A = \sigma_Z^{\mathcal{A},i} \restriction \alpha$.

Mohutnost těchto $\mathcal{A}_i$ je menší nebo rovna $\left|\max\left\{\alpha_Z^{\mathcal{A},i} : i \in n\right\}\right| < \mathfrak{s}_{\omega,\omega}$. Můžeme tak využít předpoklad $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} \leq \mathfrak{a}_k$ a najdeme $\prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$-chybějící množinu $Y \subset Z$. Pomocí lemmatu 4.20 navíc zajistíme, aby jednoduché projekce Y byly vždy shodné nebo disjunktní. Zbývá ukázat, že Y je dokonce $\mathcal{A}^n$-chybějící.

Zvolme tedy $A \in \mathcal{A}$ a $i \in n$ a položme $Y_1 = Y \cap \pi_i^{-1}[A]$. Chceme ukázat $|Y_1| < \omega$. Pokud by byly funkce $\sigma_Y^{\mathcal{A},i}$ a σ_A kompatibilní, je dle bodu (2) $A \in \mathcal{A}_i$ a výsledek plyne z toho, že Y je $\prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$-chybějící. Předpokládejme tedy, že jsou nekompatibilní. Pak najdeme α takové, že $\sigma_Y^{\mathcal{A},i}(\alpha) = 1 - \sigma_A(\alpha)$. Množina

$$Y_2 = Y \cap \pi_i^{-1}\left[S_\alpha^{\sigma_A(\alpha)}\right]$$

je $\prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$-malá díky množinám přidaným v bodě (1). Protože Y je $\prod_{i\in n} \mathcal{A}_i$-chybějící, je Y_2 konečná. Přitom z definice σ_A platí $|Y_1 \setminus Y_2| < \omega$, tedy i Y_1 je konečná. ■

Věta 5.17. Nechť platí $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} \leq \mathfrak{a}_k$, kde $1 \leq k \leq \omega$. Pak existuje nekonečný MAD systém, který je úplně n-separabilní pro všechna přirozená $1 \leq n \leq k$.

Důkaz: Očíslujme si kontinuem všechny podmnožiny všech konečných mocnin omegy s exponentem menším nebo rovným k, máme tak pro $\alpha \in \mathfrak{c}$ množinu $X_\alpha \subset \omega^{n_\alpha}$, kde $n_\alpha \leq k$. Začneme s libovolným nekonečným spočetným AD systémem $\mathcal{A}_0$ a postupujeme transfinitní indukcí do $\mathfrak{c}$. V izolovaném kroku $\alpha + 1 \in \mathfrak{c}$ máme dvě možnosti pro X_α. Je-li X_α $\mathcal{A}_\alpha^{n_\alpha}$-malá, ponecháme $\mathcal{A}_{\alpha+1} = \mathcal{A}_\alpha$. V opačném případě najdeme na základě předchozího lemmatu $\mathcal{A}_\alpha^{n_\alpha}$-chybějící $Y \subset X$. Pak $\mathcal{A}_\alpha \cup \{\pi_i[Y] : i \in n_\alpha\}$ je AD systém, prohlásíme jej za $\mathcal{A}_{\alpha+1}$. Limitní krok bude běžné sjednocení. Vlastnost „Každá funkce se mezi σ_A pro $A \in \mathcal{A}_\alpha$ vyskytuje nejvýše spočetněkrát“ zachováme díky tomu, že každá taková funkce může přibýt jen v jednom kroku. Nakonec položíme $\mathcal{A}$ sjednocení všech $\mathcal{A}_\alpha$.

V každém kroku α, kde X_α je $\mathcal{A}$-nemalá množina, jsme tak zajistili vlastnost úplně n_α-separabilního MAD systému pro množinu X_α. Výsledný AD systém $\mathcal{A}$ je tak úplně n_α-separabilním MAD systémem pro všechna $n_\alpha \leq k$. ■

Společně s konstrukcí 4.23 a tvrzením 5.8 dostáváme následující výsledky.

Důsledek 5.18. Platí-li pro $n \in \omega$ nerovnost $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}_n$, existuje k-protipříklad pro všechna $k \leq n+1$. Platí-li dokonce $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}_\omega$, existuje silně úplně separabilní AD systém a tedy ω-protipříklad i všechny k-protipříklady.

Důsledek 5.19. Platí-li $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{b}$, existuje ω-protipříklad i všechny k-protipříklady.

Závěr

Práce ukazuje, že pro existenci k-protipříkladu stačí předpoklad $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{b}$ případně $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}_{k-1}$. V práci jsou zavedeny součiny AD systémů, terminologie pro ně, a z toho dále odvozené kardinality $\mathfrak{a}_k$. Intuitice říká, že jednotlivé $\mathfrak{a}_k$ k sobě mají blíž než k $\mathfrak{b}$. Naskýtá se tak následující

Otevřená otázka. Musí být nutně všechny $\mathfrak{a}_k$ rovny $\mathfrak{a}$?

Další výzkum by taktéž mohl rozvíjet toto zobecnění AD systémů do vyšších dimenzí a například převádět další poznatky z oblasti AD systémů a kardinálu $\mathfrak{a}$ do jazyka součinu AD systémů a kardinálů $\mathfrak{a}_k$.

I úvodní kapitoly dávají prostor k dalšímu bádání. Například není zdaleka jasné, zdali pro hledání k-protipříkladu mohl přechod od obecných ideálů k AD systémům resp. jejich mocninám způsobit ztrátu obecnosti. Obecně je problém, jak dobře charakterizovat ideál, který je generovaný nějakým AD systémem.

Práce tedy nabízí více cest, kudy pokračovat ve výzkumu, je jen na čtenáři, kterou se vydá, rozhodne-li se věnovat svůj um a čas AD systémům a jejich součinům.

Literatura

[1] Gary Gruenhage, *A Note on the Product of Frechet Spaces*, Topology Proceedings 1978: 109–115

[2] Petr Simon, *A compact Fréchet space whose square is not Fréchet*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 4, 749–753

[3] Ken-ichi Tamano, *Products of Compact Fréchet Spaces*, Proc. Japan Acad., 52, Ser. A (1986): 304–307

[4] Petr Simon, *A countable Fréchet-Urysohn space of uncountable character*, Topology and its Applications 155 (2008): 1129–1139

[5] Shelah Saharon, *MAD families and SANE player*, arXiv:0904.0816, 2009

[6] Mildenberger Heike, Raghavan Dilip, Steprans Juris, Splitting families and complete separability, preprint 1204.1810, 2012

[7] Garik Dohnal, *Skoro disjunktní zjemnění*, Bakalářská práce MFF UK, 2013

Příloha A

Značení

A.1 Tabulka pojmů

Následuje tabulka překládající pojmy napříč třemi použitými jazyky.

topologický prostor $\boldsymbol{X}$	ideál $\mathcal{I}$	AD systém $\mathcal{A}$
M je odražená od ∞	$M \in \mathcal{I}$	M je $\mathcal{A}$-malá
M konverguje k ∞	$M \in \mathcal{I}^{\perp}$	M je $\mathcal{A}$-chybějící
	ortogonální uzávěr (1D)	MADové množiny (1D)
$\boldsymbol{X}$ je Fréchetovský	$\mathcal{I}$ je ortogonálně uzavřený (1D)	$\mathcal{A}$ je anti-MAD

A.2 Symboly

Následuje seznam použitých symbolů spolu s odkazem na čísla definic, ve kterých jsou zavedeny.

ω ... množina všech přirozených čísel, viz 1.0.
$\mathcal{P}(M)$ ... množina všech podmnožin množiny M, viz 1.0.
ω_1 ... první nespočetný kardinál, viz 1.0.
$\mathfrak{c}$ ... mohutnost kontinua, viz 1.0.
$\psi \subset \varphi$ ... zobrazení ψ je zúžením zobrazení φ, viz 1.0.
$\varphi[X]$ ... obraz množiny X po bodech, viz 1.0.
π_i ... projekce na i-tou souřadnici, viz 1.0.
π_I ... projekce na souřadnice z množiny I, viz 1.0.
$\pi_{\neg i}$ ... projekce na všechny souřadnice kromě i-té, viz 1.0.
∞ ... význačný bod topologického prostoru, viz 1.0.
$\boldsymbol{X}(\mathcal{I})$ ... prostor sestrojený z ideálu $\mathcal{I}$, viz 2.3.
$\mathcal{I}(\boldsymbol{X}, x)$ ... ideál množin odražených od x prostoru $\boldsymbol{X}$, viz 2.4.
$\langle A \rangle$ ... ideál generovaný $\mathcal{A}$, viz 2.6.
$\mathcal{A}^{\perp}$ ... ortogonální doplněk $\mathcal{A}$, viz 2.7.
$\overline{\mathcal{A}}$ ... ortogonální uzávěr systému $\mathcal{A}$, viz 2.9.
$\mathfrak{p}$ ... pseudointersection number, viz 2.14.
$\boldsymbol{Y}(\mathcal{A})$ ... prostor sestrojený z AD systému $\mathcal{A}$, viz 3.3.
$\prod_{i \in n} \mathcal{A}_i$ ... formální součin AD systémů, viz 4.0.
$\mathfrak{s}$ ... štěpící číslo, viz 5.2.
$\mathfrak{s}_{\omega,\omega}$ ... ω, ω-štěpící číslo, viz 5.2.
$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_n$ ... první, n-té MADové číslo, viz 5.4.
$\mathfrak{a}_\omega$ ... minumum všech $\mathfrak{a}_n$, viz 5.4.
$\mathfrak{b}$ ... bounding number, viz 5.6.
S^0_α, S^1_α ... α-tá štěpící množina, viz 5.9.
α_A ... štěpící pozice množiny A, viz 5.9.
σ_A ... funkce popisující průchod A štěpícími množinami, viz 5.9.
$\alpha^{\mathcal{A},i}_X, \sigma^{\mathcal{A},i}_X$ ... zobecnění předchozího s ohledem na AD systém $\mathcal{A}$, viz 5.12.

A.3 Rejstřík pojmů

Rejstřík odkazuje na čísla definic, v závorce následují čísla stran.